Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 183

In 4 Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1941

Archiv-Nr. 18 03 41

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35

Printed in Germany

Math. Lib.
Harv.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 183.

Seite

Arf, Cahit, Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2. (Teil I) 148

Bitterlich-Willmann, Johann, Eine Verallgemeinerung der Fermatschen Vermutung 251

Chung, Kai-Lai, A generalization of an inequality in the elementary theory of numbers 193

Denk, Franz und **Otto Haupt,** Über die Singularitäten reeller Bogen im R_n . . . 69

Deuring, Max, Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. II. 25

Haenzel, G., Die Diracsche Wellengleichung und das Ikosaeder 232

Kanold, Hans-Joachim, Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen . 98

Kowalewski, Gerhard, Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_6 von Berührungstransformationen 243

Lemke, H., Über die Gleichung der Gaskugeln und andere Differentialgleichungen von ähnlicher Form 197

Sz. Nagy, Gyula von, Über die Kurven n-ter Ordnung im projektiven q-dimensionalen Raum für $n < 2q$ 1

— — Zur Theorie der Flächen vom Maximalindex 129

Nöbeling, Georg, Geometrische (Realitäts-)Ordnung und topologische Struktur . . 37

Rédei, L., Über den Euklidischen Algorithmus in reell-quadratischen Zahlkörpern 183

Schmeidler, Werner, Über ein zweidimensionales Analogon einer Formel der Integralrechnung 175

Schneider, Theodor, Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale . . . 110

Stöhr, Alfred, Bemerkungen zur additiven Zahlentheorie. I. Mittlere Ordnung . . 168

Suetuna, Zyoiti, Über die sich selbst assoziierten Charaktere der symmetrischen Gruppe 92

Ziegenbein, P., Konfigurationen in der Kreisgeometrie 9

Ergänzung eines Zitates in der Arbeit: Haupt, Nöbeling, Pauc, Über Abhängigkeitsräume (dieses Journal, Bd. 181) 68

Ergebnis des 10. wissenschaftlichen Wettbewerbs der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V. 68

Ausgabedaten der Hefte von Band 183.

Heft 1 ausgegeben am 18. Dezember 1940
Heft 2 ausgegeben am 25. Februar 1941
Heft 3 ausgegeben am 26. Mai 1941
Heft 4 ausgegeben am 11. August 1941

Über die Kurven n-ter Ordnung im projektiven q-dimensionalen Raum für $n < 2q$.[1])

Von *Gyula (Julius) v. Sz. Nagy* in Szeged (Ungarn).

1. *Einleitung.*

Eine einzügige Kurve im reellen projektiven q-dimensionalen Raume R_q ist ein reelles eindeutiges stetiges Kreisbild im R_q, die in keiner Hyperebene von R_q liegt. Die Züge einer mehrzügigen Kurve im R_q sind einzügige Kurven im R_q [2]).

Eine Kurve $K^{(q)}$ im R_q hat die *Ordnung* n, wenn die Maximalanzahl der gemeinsamen Punkte von $K^{(q)}$ mit den Hyperebenen von R_q — die gemeinsamen Punkte mit entsprechender Vielfachheit [3]) gerechnet — gleich n ist. Eine Kurve $K^{(q)}$ von n-ter Ordnung im R_q wird im folgenden mit $K_n^{(q)}$ bezeichnet.

Aus dieser Definition folgt, daß eine Hyperebene von R_q keinen Teilbogen einer Kurve $K_n^{(q)}$ enthält. Andernfalls besäße die Kurve keine endliche Ordnung, weil sie mit der betreffenden Hyperebene unendlichviele Punkte gemeinsam hätte.

Die Minimalanzahl der Punkte, in denen die Kurve $K_n^{(q)}$ von den Hyperebenen von R_q getroffen werden kann, heißt der *Index* von $K_n^{(q)}$.

Es ist bekannt, daß die Kurven $K_2^{(2)}$, d. h. die ebenen Kurven zweiter Ordnung, aus einem Zuge bestehen und keinen singulären Punkt haben. Die Kurven $K_3^{(2)}$, d. h. die ebenen Kurven dritter Ordnung, haben höchstens zwei Züge. Hat aber eine Kurve $K_3^{(2)}$ einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt, so hat sie keinen anderen singulären Punkt; sie besteht aus einem Zuge.

Eine Kurve $K_4^{(2)}$ aber, d. h. eine ebene Kurve vierter Ordnung, kann beliebig viele Züge und Doppelpunkte besitzen.

Nimmt man nämlich in der Ebene n Punkte an, von denen höchstens zwei auf einer Geraden liegen, so lassen sich diese n Punkte so durch genügend kleine Ovale ersetzen,

---

[1]) Diese Arbeit ist eine in mehreren Punkten veränderte Umarbeitung einer ungarischen Abhandlung des Verfassers, Math. u. Naturwiss. Anzeiger d. Ungarischen Akademie d. Wiss. **56** (1937), S. 783—791.

[2]) Wir haben stets den Fall vor Augen, wo die Kurve $K_n^{(q)}$ in jedem Punkte eine bestimmte Tangente hat. Unsere Resultate gelten aber auch für allgemeinere Fälle.

[3]) Als Vielfachheit eines Punktes P einer Kurve $K_n^{(q)}$ wird die Anzahl der zu P gehörigen Stellen bezeichnet. Die Vielfachheit des Punktes ist auch die Minimalanzahl der Punkte, in denen die Kurve von den durch P gehenden Hyperebenen des Raumes R_q in einer Umgebung von P getroffen wird. Die Maximalanzahl dieser Punkte wird von O. Haupt die Ordnung des Punktes P genannt; vgl. die folgenden Arbeiten von O. Haupt: Über einen Satz von Herrn J. Hjelmslev, Erlanger Ber. **60** (1928), S. 327—328; Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal **164** (1931), S. 50—60.

Dementsprechend könnte man die Vielfachheit des Punktes auch den Index des Punktes nennen.

daß höchstens zwei dieser Ovale von einer beliebigen Geraden der Ebene getroffen werden können. Diese n Ovale bilden also eine ebene Kurve vierter Ordnung.

Ersetzt man die zwei n-seitigen regelmäßigen konvexen Polygone, deren Ecken die ungeraden bzw. geraden Ecken eines regelmäßigen $2n$-seitigen Polygons sind, durch je ein genügend nahe liegendes Oval, so bilden die so erhaltenen Ovale eine zweizügige ebene Kurve vierter Ordnung mit $2n$ Doppelpunkten.

Wir bezeichnen die Doppelpunkte dieser Kurve $K_4^{(2)}$ in der Reihenfolge, wie sie auf dem einen Oval aufeinander folgen, mit $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Es ist klar, daß die Doppelpunkte auch auf dem anderen Oval dieselbe zyklische Anordnung haben.

Die zwei Ovale dieser Kurve $K_4^{(2)}$ begrenzen $2n + 2$ Gebiete in der Ebene. Das innerhalb bzw. außerhalb beider Ovale liegende Gebiet wird im folgenden mit G' bzw. G'' bezeichnet. Die übrigen Gebiete werden $G_1, G_2, \ldots, G_{2n}$ genannt. Jedes dieser $2n$ Gebiete liegt im Inneren des einen und im Äußeren des anderen Ovales und hat mit zweien der $2n - 1$ übrigen Gebiete G_k je einen Randpunkt gemeinsam. Diese gemeinsamen Randpunkte stimmen mit den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ überein. Die Bezeichnung der Gebiete $G_1, G_2, \ldots, G_{2n}$ läßt sich so wählen, daß G_i und G_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, 2n;$ $G_{2n+1} \equiv G_1)$ den Punkt A_i gemeinsam haben.

Schneidet man den Doppelpunkt A_i so durch, daß die Gebiete G' und G'' im Punkte A_i vereinigt werden, und rundet man [4]) die an Stelle von A_i erhaltenen Winkelpunkte entsprechend ab, so erhält man eine einzügige Kurve $K_4^{(2)}$ mit $2n - 1$ Doppelpunkten. Wendet man dieses Verfahren auf $m - 1$ weitere Doppelpunkte von $K_4^{(2)}$ an, so erhält man eine m-zügige Kurve $K_4^{(2)}$ mit $2n - m$ Doppelpunkten.

Der Doppelpunkt A_i einer Kurve $K_4^{(2)}$ mit $2n$ Doppelpunkten läßt sich auch auf eine andere Weise aufheben. Man verbinde durch A_i die Gebiete G_i und G_{i+1} und runde die an Stelle von A_i erhaltenen Winkelpunkte ab. Nach h-maliger Anwendung dieses Verfahrens erhält man aus einer m-zügigen Kurve $K_4^{(2)}$ mit $2n - m$ Doppelpunkten eine ebenfalls m-zügige Kurve $K_4^{(2)}$, die nur $k = 2n - m - h$ Doppelpunkte besitzt.

Es gilt also der Satz:

Zu jeder positiven ganzen Zahl m und zu jeder nichtnegativen ganzen Zahl k gibt es ebene Kurven vierter Ordnung, die aus m Zügen bestehen und k Doppelpunkte besitzen.

Man kann auch leicht folgenden Satz erhalten:

Die Gesamtanzahl der Züge und Doppelpunkte für eine Kurve $K_3^{(3)}$, $K_4^{(3)}$ *bzw.* $K_5^{(3)}$ *ist nicht größer als* 1, 2 *bzw.* 3. *Es gibt aber Kurven* $K_6^{(3)}$, *die aus beliebig vielen Zügen bestehen.*

Eine n-zügige Kurve $K_6^{(3)}$ läßt sich auf folgende Weise darstellen:

Man nimmt auf einer Kugelfläche n genügend kleine Kreise an, von denen höchstens drei von einer beliebigen Ebene getroffen werden können. Jede von den Ebenen der n Kreise abweichende Ebene trifft also die n Kreise in höchstens 6 Punkten. Die Ebene irgendeines Kreises trifft keinen der übrigen $n - 1$ Kreise.

In genügend nahen Umgebungen der n Kreise kann man offenbar je eine Raumkurve vierter Ordnung so annehmen, daß die Ebenen, von denen eine dieser Raumkurven vierter Ordnung in 4 Punkten getroffen wird, mit keiner der übrigen $n - 1$ Raumkurven vierter Ordnung Punkte gemeinsam haben. Diese n Raumkurven vierter Ordnung bilden also eine Kurve $K_6^{(3)}$.

---

[4]) Vgl. C. Juel, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, Danske Vidensk. Selsk. Skr. (7) **11** Nr. 2 (1914), S. 123—124.

Daraus folgt, daß man im Falle $n \geqq 2q$ im allgemeinen nicht erwarten kann, daß die Gesamtanzahl der Züge und Doppelpunkte jeder Kurve $K_n^{(q)}$ beschränkt ist. Es gilt aber der Satz:

I. *Die Gesamtanzahl der Züge und Doppelpunkte der Kurven $K_n^{(q)}$ (d. h. der Kurven n-ter Ordnung im q-dimensionalen Raum R_q) ist höchstens $n+1-q$, falls $n < 2q$ ist. Dabei sind die Rückkehrpunkte zu den Doppelpunkten zu rechnen.*

2. *Beweis des Satzes I.*

Für den Beweis des Satzes I nehmen wir an, daß es im Gegenteil eine Kurve $K_n^{(q)}$ mit d Doppelpunkten und mit $m \geqq n+2-q-d$ Zügen gibt, für die $n < 2q$ ist.

Aus der Ungleichung $n < 2q$ folgt, daß $d < q$ ist. Wäre nämlich $d \geqq q$, so hätte $K_n^{(q)}$ mit einer Hyperebene von R_q, die durch q Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ geht, mindestens $2q$ Punkte gemeinsam. Dies ist aber unmöglich, weil $2q$ größer ist als die Ordnung n der Kurve $K_n^{(q)}$.

Wegen $d < q$ kann man durch die d Doppelpunkte und durch $q-d$ einfache Punkte von $K_n^{(q)}$ eine Hyperebene legen.

Wir teilen jetzt die Züge von $K_n^{(q)}$ in zwei Klassen ein. Zu der ersten Klasse gehören diejenigen paaren bzw. unpaaren Züge, auf denen die Summe der Vielfachheiten der d Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ eine ungerade bzw. gerade Zahl ist. Die zweite Klasse umfaßt die übrigen Züge von $K_n^{(q)}$. Wir bezeichnen mit m_1 bzw. m_2 die Anzahl der Züge der ersten bzw. der zweiten Klasse.

Eine Hyperebene von R_q trifft einen paaren bzw. unpaaren Zug von $K_n^{(q)}$ in einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von Punkten. Daraus folgt, daß die Anzahl der Treffpunkte eines Zuges Z von $K_n^{(q)}$ mit einer durch die d Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ gehenden Hyperebene um eine ungerade bzw. gerade Zahl größer ist als die Summe der Vielfachheiten der Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ für den Zug Z, je nachdem der Zug Z zu der ersten bzw. zweiten Klasse gehört.

Wir legen nun eine Hyperebene H durch die d Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ und durch bestimmte $q-d$ einfache Punkte von $K_n^{(q)}$. Diese $q-d$ Punkte wählen wir auf folgende Weise:

Ist $m_2 \geqq q-d$, so wählen wir auf $q-d$ Zügen zweiter Klasse je einen Punkt.

Ist $0 < m_2 < q-d$, so wählen wir auf einem Zuge zweiter Klasse $q-d-m_2+1$ Punkte, auf den übrigen m_2-1 Zügen zweiter Klasse je einen Punkt.

Ist $m_2 = 0$, so wählen wir auf einem Zuge erster Klasse $q-d$ Punkte.

Bezeichnet N die Anzahl der Treffpunkte von H und $K_n^{(q)}$, so erhält man für N im ersten, zweiten bzw. dritten Falle nach dem Vorigen die Ungleichung

$$(1) \qquad N \geqq 2d + m_1 + 2(q-d) = 2q + m_1 \geqq n+1+m_1 \geqq n+1,$$

$$(2) \quad N \geqq 2d + m_1 + (q-d-m_2+1) + 2(m_2-1) = (m_1+m_2) + q + d - 1$$
$$\geqq (n+2-q-d) + q + d - 1 = n+1$$

bzw.

$$(3) \qquad N \geqq 2d + (q-d) + (m_1-1) = (q+d+m_1) - 1$$
$$= (q+d+m) - 1 \geqq n+1\,.$$

Die Anzahl der Treffpunkte der Hyperebene H mit einem Zuge Z der ersten bzw. zweiten Klasse ist nämlich um eine ungerade bzw. gerade Zahl größer als die Summe der Vielfachheiten der Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ für diesen Zug.

Die Hyperebene H trifft daher die Kurve n-ter Ordnung $K_n^{(q)}$ in mehr als n Punkten. Dies ist aber unmöglich. Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes I.

3. *Verschärfungen des Satzes I.*

In Satz I darf man einen k-fachen Punkt als Inbegriff von $k-1$ Doppelpunkten auffassen. Es gilt nämlich der Satz:

II. *Hat eine m-zügige Kurve $K_n^{(q)}$ s mehrfache Punkte mit den Vielfachheiten $k_1, k_2, \ldots, k_s$ $(k_i \geqq 2)$, ist ferner $\sum_{i=1}^{s} (k_i - 1) = d$ und ist endlich $n < 2q$, so besteht die Ungleichung*

$$m + d \leqq n + 1 - q\,.$$

Dieser Satz ergibt sich aus dem folgenden:

III. *Besitzt eine m-zügige Kurve $K_n^{(q)}$ s mehrfache Punkte mit den Vielfachheiten $k_1, k_2, \ldots, k_s$ $(k_i \geqq 2)$, gibt es ferner unter den m Zügen ν_1 paare bzw. ν_2 unpaare Züge, auf denen die Summe der Vielfachheiten der mehrfachen Punkte von $K_n^{(q)}$ eine ungerade bzw. gerade Zahl ist, und ist endlich*

$$n - \left(\sum_{i=1}^{s} k_i - 2s\right) - (\nu_1 + \nu_2) < 2q, \tag{4}$$

so besteht die Ungleichung

$$m + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i - s\right) \leqq n + 1 - q. \tag{5}$$

Für den Beweis dieses Satzes nehmen wir an, daß es eine Kurve $K_n^{(q)}$ gibt, für die die Ungleichung (4) besteht und für die statt (5)

$$m + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i - s\right) \geqq n + 2 - q \tag{6}$$

ist.

Wir teilen die Züge von $K_n^{(q)}$ in zwei Klassen ein. Die erste Klasse faßt die im Satze III genannten ν_1 paaren und ν_2 unpaaren Züge zusammen, die zweite Klasse die übrigen Züge von $K_n^{(q)}$. Die Anzahl der Züge der ersten bzw. zweiten Klasse sei mit m_1 bzw. m_2 bezeichnet, so daß $m_1 = \nu_1 + \nu_2$ und $m = m_1 + m_2$ ist.

Wir legen eine Hyperebene H durch die s mehrfachen Punkte und durch $q - s$ einfache Punkte von $K_n^{(q)}$. Wir wählen diese $q - s$ einfachen Punkte auf folgende Weise:

Ist $m_2 \geqq q - s$, so wählen wir auf $q - s$ Zügen zweiter Klasse je einen Punkt.

Ist $0 < m_2 < q - s$, so wählen wir auf einem Zug zweiter Klasse $q - s - m_2 + 1$ Punkte, auf den übrigen $m_2 - 1$ Zügen zweiter Klasse je einen Punkt.

Ist $m_2 = 0$, so wählen wir auf einem Zuge erster Klasse $q - s$ Punkte.

Bezeichnet N die Anzahl der Treffpunkte der so bestimmten Hyperebene H mit der Kurve $K_n^{(q)}$, so erhält man für N auf Grund der Eigenschaften der paaren und unpaaren Züge und auf Grund der Ungleichungen (4) und (6) in den drei Fällen die Ungleichungen

$$N \geqq \sum_{i=1}^{s} k_i + m_1 + 2(q - s) = 2q + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i - 2s\right) + (\nu_1 + \nu_2) \geqq n + 1, \tag{7}$$

$$N \geqq \sum_{i=1}^{s} k_i + m_1 + (q - s - m_2 + 1) + 2(m_2 - 1) = m + q + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i - s\right) - 1 \geqq (n + 2) - 1 = n + 1 \tag{8}$$

bzw.

$$N \geqq \sum_{i=1}^{s} k_i + (q - s) + (m_1 - 1) = m + q + \left(\sum_{i=1}^{s} k_i - s\right) - 1 \geqq n + 1\,. \tag{9}$$

Die Hyperebene H trifft somit die Kurve n-ter Ordnung $K_n^{(q)}$ in mehr als n Punkten. Die Annahme der Gültigkeit von (6) führt also zum Widerspruch. Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes III. Damit ist auch Satz II bewiesen.

Aus den Ungleichungen (5) und (4) ergibt sich die folgende:

$$m + \sum_{i=1}^{s} k_i - s \leqq n + 1 - q < \left(2q + \sum_{i=1}^{s} k_i - 2s + m_1\right) + 1 - q\,,$$

die sich in der Form

$$m + s < q + m_1 + 1\,,$$

also auch in der Form

$$m + s \leqq q + m_1$$

schreiben läßt.

Daraus folgt der Satz:

IV. *Besitzt eine m-zügige Kurve $K_n^{(q)}$ mit s mehrfachen Punkten unter ihren Zügen v_1 paare bzw. v_2 unpaare Züge, auf denen die Summe der Vielfachheiten der mehrfachen Punkte von $K_n^{(q)}$ eine ungerade bzw. gerade Zahl ist, und ist*

$$n < 2q + v_1 + v_2\,,$$

so besteht die Ungleichung

$$m + s \leqq q + v_1 + v_2\,.$$

4. *Folgerungen. Sätze für die zentrale Projektion einer Kurve $K_n^{(q)}$.*

Aus den Sätzen I und II folgen die Sätze:

V. *Eine Kurve $K_n^{(q)}(n < 2q)$ hat höchstens $n + 1 - q$ Züge. Eine $(n + 1 - q)$-zügige Kurve $K_n^{(q)}(n < 2q)$ kann keinen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt haben.*

VI. *Keine Kurve $K_n^{(q)}(n < 2q)$ hat mehr als $n - q$ Doppelpunkte. Hat eine Kurve $K_n^{(q)}(n < 2q)$ $n - q$ Doppelpunkte, so ist sie notwendigerweise einzügig.*

Hier ist wieder ein k-facher Punkt als Inbegriff von $k - 1$ Doppelpunkten zu rechnen.

Es sei P ein k-facher Punkt einer m-zügigen Kurve $K_n^{(q)}$. Wir bezeichnen mit d die Anzahl der Doppelpunkte, die im Satz II mit den mehrfachen Punkten von $K_n^{(q)}$ äquivalent sind.

Wir erhalten durch zentrale Projektion der Kurve $K_n^{(q)}$ von ihrem k-fachen Punkte P aus auf eine (nicht durch P gehende) Hyperebene R_{q-1} von R_q eine Kurve $K_{n-k}^{(q-1)}$. Diese Kurve ist wieder m-zügig.

Diese zentrale Projektion führt im allgemeinen den k-fachen Punkt P bzw. einen h-fachen Punkt Q $(h \geqq 1)$ von $K_n^{(q)}$ in k einfache Punkte bzw. in einen h-fachen Punkt Q' von $K_{n-k}^{(q-1)}$ über. Die Anzahl der Doppelpunkte, die den Projektionen der mehrfachen Punkte von $K_n^{(q)}$ entsprechen, ist also $d' = d - (k - 1)$.

Jeder Geraden g durch P, die die Kurve $K_n^{(q)}$ in $k + h$ Punkten trifft, entspricht ein h-facher Punkt von $K_{n-k}^{(q-1)}$. Wir bezeichnen mit t die Anzahl der Doppelpunkte, die mit diesen mehrfachen Punkten von $K_{n-k}^{(q-1)}$ äquivalent sind. Gibt es unter den durch P gehenden Geraden von R_q r Geraden, die die Kurve $K_n^{(q)}$ in mindestens $k + 2$ Punkten treffen, und sind $k + h_1$, $k + h_2$, . . ., $k + h_r$ die Anzahlen dieser Treffpunkte, so ist $t = \sum_{i=1}^{r} h_i - r$.

Die Anzahl der Doppelpunkte von $K_{n-k}^{(q-1)}$ (einen h-fachen Punkt als Inbegriff von $h - 1$ Doppelpunkten gerechnet) ist also $d - k + 1 + t$.

Besteht nun die Ungleichung $n - k < 2(q-1)$, so besteht (nach Satz I) auch die Ungleichung

$$m + d - k + 1 + t \leqq n - k + 1 - (q-1)\,.$$

Aus der Ungleichung

$$n < 2q + k - 2 \tag{10}$$

folgt also die Ungleichung

$$m + d + t \leqq n + 1 - q\,. \tag{11}$$

Aus diesen Ungleichungen für $k = 2$ und $k = 1$ erhält man nun die Sätze:

VII. *Hat eine m-zügige Kurve $K_n^{(q)}(n < 2q)$ d Doppelpunkte und gibt es unter den durch einen dieser Doppelpunkte gehenden Geraden t Geraden, die die Kurve in mindestens vier Punkten treffen, so besteht die Ungleichung*

$$m + d + t \leqq n + 1 - q\,.$$

VIII. *Hat eine m-zügige Kurve $K_n^{(q)}$ d Doppelpunkte und t Trisekanten, die durch einen Punkt der Kurve gehen, und ist $n < 2q - 1$, so besteht die Ungleichung*

$$m + d + t \leqq n + 1 - q\,.$$

Die Trisekante bedeutet hier eine Gerade, die die Kurve in drei (verschiedenen oder zusammenfallenden) Punkten trifft.

Durch zentrale Projektion der m-zügigen Kurve $K_n^{(q)}$ von einem außerhalb der Kurve liegenden Punkte P aus auf eine Hyperebene erhalten wir eine m-zügige Kurve $K_n^{(q-1)}$. Ist $n < 2(q-1)$ und hat $K_n^{(q)}$ d Doppelpunkte und t durch P gehende Bisekanten, so gilt die Ungleichung

$$m + d + t \leqq n + 1 - (q-1) = n + 2 - q\,.$$

Es gilt also der Satz:

IX. *Hat eine m-zügige Kurve $K_n^{(q)}$ d Doppelpunkte und t scheinbare Doppelpunkte in bezug auf einen außerhalb von $K_n^{(q)}$ liegenden Punkt und ist $n < 2q - 2$, so besteht die Ungleichung $m + d + t \leqq n + 2 - q$.*

5. *Über die Kurven $K_n^{(n)}$, $K_n^{(n-1)}$ und $K_n^{(n-2)}$.*

Aus den vorangehenden Sätzen folgen auch die nachstehenden:

X. *Jede Kurve $K_n^{(n)}$ besteht aus einem einzigen Zuge und hat keinen Doppelpunkt, keinen Rückkehrpunkt, keine Trisekante. Zwei Bisekanten einer Kurve $K_n^{(n)}(n \geqq 3)$ schneiden einander niemals außerhalb der Kurve* [5]).

Hierbei sind die Tangenten der Kurve als Bisekanten zu betrachten.

XI. *Eine Kurve $K_n^{(n-1)}$ ist entweder zweizügig ohne Doppelpunkte oder einzügig mit höchstens einem Doppelpunkt. Ist $n > 4$, so hat eine zweizügige Kurve $K_n^{(n-1)}$ oder eine einzügige Kurve $K_n^{(n-1)}$ mit einem Doppelpunkt höchstens eine Bisekante durch einen außerhalb der*

---

[5]) P. Scherk hat bewiesen (Über differenzierbare Kurven und Bögen, Časopis pro pěstováni Mat. a fys. **66** (1936/37), S. 181—183), daß jede differenzierbare Kurve $K_n^{(n)}$ die Klasse n hat. Eine Kurve $K_n^{(q)}$ heißt dabei differenzierbar, wenn sämtliche linearen Schmiegmannigfaltigkeiten in jedem der Punkte von $K_n^{(q)}$ existieren. Die Klasse einer differenzierbaren Kurve $K_n^{(q)}$ bedeutet die Maximalanzahl der Schmieghyperebenen der Kurve, die durch einen Punkt des Raumes R_q gehen.

Kurve liegenden Punkt des Raumes R_{n-1}. Keine Kurve $K_n^{(n-1)}$ hat mehr als zwei scheinbare Doppelpunkte in bezug auf einen außerhalb der Kurve liegenden Punkt [6]).

XII. *Jede Kurve $K_n^{(n-2)}(n > 4)$ ist entweder dreizügig und doppelpunktfrei oder zweizügig mit höchstens einem Doppelpunkt oder einzügig mit höchstens zwei Doppelpunkten. Ist $n > 6$, so hat jede dreizügige Kurve $K_n^{(n-2)}$, jede zweizügige Kurve $K_n^{(n-2)}$ mit einem Doppelpunkt und jede einzügige Kurve $K_n^{(n-2)}$ mit zwei Doppelpunkten in bezug auf einen außerhalb der Kurve liegenden Punkt des Raumes R_{n-2} höchstens einen scheinbaren Doppelpunkt. Die zweizügigen Kurven $K_n^{(n-2)}$ ohne Doppelpunkt und die einzügigen Kurven $K_n^{(n-2)}$ mit einem Doppelpunkt haben im Falle $n > 6$ höchstens zwei scheinbare Doppelpunkte. Die einzügigen und doppelpunktfreien Kurven $K_n^{(n-2)}(n > 6)$ haben höchstens drei scheinbare Doppelpunkte.*

Hierbei darf statt zwei Doppelpunkten ein dreifacher Punkt auftreten.

Als Ergänzung der vorangehenden Sätze können wir die folgenden Sätze aussprechen:

XIII. *Ist n eine gerade Zahl, so haben beide Züge einer zweizügigen Kurve $K_n^{(n-1)}$ dieselbe Ordnung, und zwar entweder n oder $n-1$. Ist aber n eine ungerade Zahl, so hat der eine Zug der zweizügigen Kurve $K_n^{(n-1)}$ die Ordnung n, der andere die Ordnung $n-1$.*

XIV. *Die möglichen Ordnungen der Züge einer zweizügigen Kurve $K_n^{(n-2)}(n > 4)$ sind:*

$$1)\ n,\ n;\quad 2)\ n,\ n-2;\quad 3)\ n-2,\ n-2;\quad 4)\ n-1,\ n-1$$

bzw.

$$1)\ n,\ n-1;\quad 2)\ n-2,\ n-1\,,$$

je nachdem n eine gerade bzw. ungerade Zahl ist.

XV. *Die möglichen Ordnungen der Züge einer dreizügigen Kurve $K_n^{(n-2)}(n > 4)$ sind:*

$$1)\ n,\ n,\ n;\qquad 2)\ n,\ n,\ n-2;\qquad 3)\ n,\ n-2,\ n-2;$$
$$4)\ n-2,\ n-2,\ n-2;\quad 5)\ n-2,\ n-1,\ n-1;\quad 6)\ n,\ n-1,\ n-1\,.$$

Ist n gerade, so kommt der letzte Fall nicht vor. Ist n ungerade, so sind die ersten drei Fälle unmöglich.

Diese Sätze ergeben sich aus dem folgenden evidenten Satz:

Hat eine mehrzügige Kurve $K_n^{(q)}$ einen Zug n-ter Ordnung, so haben die übrigen Züge den Index Null und damit eine gerade Ordnung.

Die Frage, ob es entsprechende Kurven $K_n^{(n-1)}$ bzw. $K_n^{(n-2)}$ für die in den vorigen Sätzen nicht ausgeschlossenen Fälle gibt, müssen wir offen lassen. Es gibt jedoch algebraische Kurven $K_4^{(3)}$ mit zwei Zügen dritter Ordnung oder mit zwei Zügen vierter Ordnung.

6. *Über Kurven $K_n^{(q)}$, deren Index größer als Null ist.*

Hat eine Kurve $K_n^{(q)}$ einen unpaaren Zug, so ist ihr Index mindestens gleich Eins. Im Satze III spielen die unpaaren Züge nur dann eine Rolle, wenn für sie die Summe der

---

[6]) O. Haupt hat bewiesen (Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Annalen **108** (1933), S. 139—141), daß jede differenzierbare Kurve $K_n^{(n-1)}$ als Summe endlich vieler Bögen $(n-1)$-ter Ordnung im R_{n-1} darstellbar ist und daher nur endlichviele Punkte der Ordnung n enthält. Die Anzahl dieser Teilbögen besitzt eine nur von n abhängige obere Schranke.

P. Scherk hat bemerkt (Über Punkte $(n+1)$-ter Ordnung auf Bögen im R_n, Annali di Matematica (4) **17** (1938), S. 294—295), daß jeder Bogen einer Kurve $K_n^{(n-1)}$ und deshalb jede Kurve $K_n^{(n-1)}$ höchstens einen Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt und keinen mehr-als-zweifachen Punkt hat.

Vielfachheiten der mehrfachen Punkte eine gerade Zahl ist. Für Kurven $K_n^{(q)}$ vom höheren Index läßt sich der folgende Satz aussprechen:

XVI. *Bilden einige Züge einer Kurve $K_n^{(q)}$ eine Kurve vom Index i und ist $n - i < 2q$, so ist die Gesamtanzahl der Züge und Doppelpunkte für die von den übrigen Zügen von $K_n^{(q)}$ gebildete Kurve höchstens gleich $n + 1 - i - q$.*

Läßt man aus $K_n^{(q)}$ die Kurve vom Index i weg, so bilden die restlichen Züge eine Kurve $K_n^{(q)}$ der Ordnung $n' \leqq n - i$. Da $2q > n - i \geqq n'$ ist, so gilt für die Gesamtanzahl $m' + d'$ der Züge und Doppelpunkte von $K_n^{(q)}$ die Ungleichung

$$m' + d' \leqq n' + 1 - q \leqq n + 1 - i - q < \frac{n - i}{2} + 1.$$

Es gilt also der Satz:

XVII. *Bilden einige Züge einer Kurve $K_n^{(q)}$ eine Kurve vom Index i und ist $n - i < 2q$, so ist die Gesamtanzahl der Züge und Doppelpunkte für die von den übrigen Zügen von $K_n^{(q)}$ gebildete Kurve höchstens gleich $\frac{n - i}{2}$.*

Da ν unpaare Züge eine Kurve vom Index $i \geqq \nu$ bilden, können wir auch den folgenden Satz aussprechen:

XVIII. *Hat eine Kurve $K_n^{(q)}$ ν unpaare Züge und ist $2q > n - \nu$, so hat die Kurve höchstens $\frac{n - \nu}{2}$ paare Züge. Die Anzahl der paaren Züge erreicht diese obere Schranke nur für solche Kurven $K_n^{(q)}$ mit ν unpaaren Zügen, deren unpaare Züge eine Kurve vom Index ν bilden und deren paare Züge sich selbst und einander nicht schneiden.*

Eingegangen 25. April 1939.

Konfigurationen in der Kreisgeometrie.

Von *P. Ziegenbein* in Göttingen.

Vorbemerkung.

Als Kreisgeometrie bezeichnen wir eine Geometrie, die als Elemente nur Kreise und Punkte enthält. Eine Axiomatik für eine solche Geometrie hat van der Waerden aufgebaut [1]). Die Fragen über Schnittpunktsätze in dieser Geometrie und über Kreis-Punkt-Konfigurationen sind noch kaum behandelt worden, abgesehen von einigen Arbeiten, die A. Miquel vor etwa 100 Jahren veröffentlichte [2]), die aber nur unsystematisch einige Einzelheiten aufzählen.

Die vorliegende Arbeit behandelt vor allem ausführlich die Konfigurationen von 2^{n-1} Kreisen und ebensoviel Punkten, bei denen jedes Element der einen Art mit n Elementen der anderen inzidiert. Die Ergebnisse werden fast ausschließlich auf synthetischem, elementargeometrischem Wege gefunden. Dazu wird im ersten Paragraphen ein Kalkül definiert, der das Rechnen mit Winkeln zwischen Kreisen gestattet; er ist den vorliegenden Problemen besonders angepaßt, und er erweist sich als nützlich für die einfache Durchführung der Beweise unserer Sätze.

§ 1. Der Winkel-Kalkül.

Wir gehen von einem Punkt (0) aus, legen durch ihn eine endliche Anzahl von Kreisen (1), (2), (3), . . ., (n) in nicht spezieller Lage und nennen die weiteren Schnittpunkte dieser Kreise miteinander (12), (23), (13), . . . Durch die drei Schnittpunkte (12), (13), (23) legen wir einen neuen Kreis (123); ebenso entstehen die Kreise (124), (134), (234), ... Wir werden beweisen, daß je vier Kreise wie (123), (124), (134), (234) durch einen Punkt (1234) gehen, ferner, daß je fünf Punkte wie (1234), (1235), (1245), (1345), (2345) wieder auf einem Kreis (12345) liegen, usw.

So entsteht eine Konfiguration aus 2^{n-1} Punkten und 2^{n-1} Kreisen, in der durch jeden Punkt n Kreise gehen und auf jedem Kreise n Punkte liegen, oder also kurz eine Kreis-Punkt-Konfiguration $(2^{n-1}, n)$. Für $n = 3, 4, 5$ sind diese Konfigurationen schematisch in Figur 1 dargestellt.

Bei unserer Bezeichnung bedeuten Symbole von gerader Gliederzahl Punkte, von ungerader Gliederzahl Kreise; das „leere“ Symbol (0) ist dabei als gerades Symbol zu rechnen.

Die Koinzidenz-Beziehungen in den betr. Konfigurationen lassen sich aus den Symbolen in einfacher Weise ablesen. Eine Koinzidenz-Beziehung (Kreis durch Punkt,

[1]) B. L. v. d. Waerden, Mathematische Annalen **110** (1935), S. 753—764.

[2]) A. Miquel, Journal de Mathématique **3** (1838), **9** (1844), **10** (1845).

Schema für die Konfiguration $(2^{n-1}, n)$.

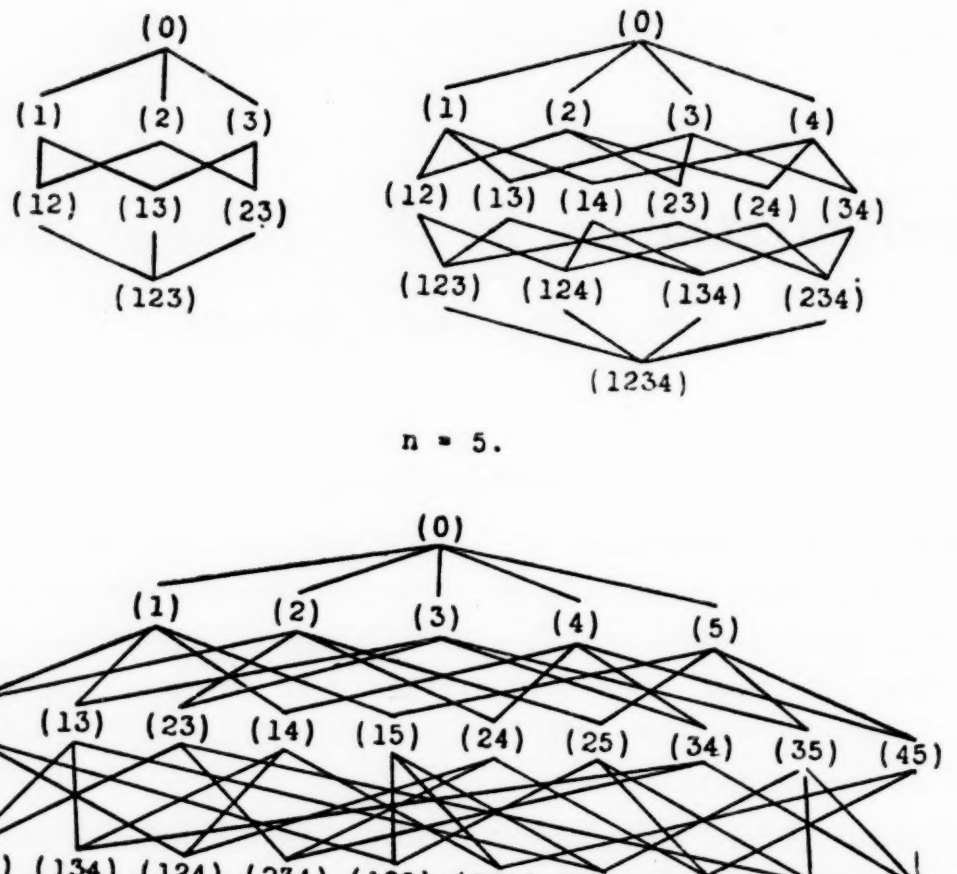
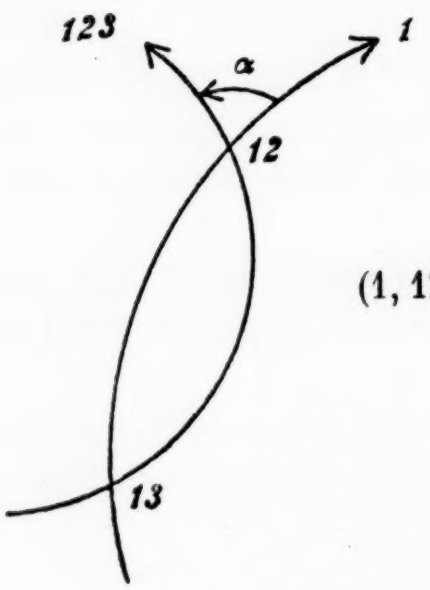


Fig. 1.

Punkt auf Kreis) kann nur zwischen Symbolen von unmittelbar benachbarten Gliederzahlen bestehen; sie drückt sich dadurch aus, daß das kleinere Symbol eine Teilmenge des größeren ist.

Wir wollen jetzt den Winkel zwischen zwei Kreisen eindeutig festlegen und durch ein Symbol beschreiben. Dazu versehen wir die Kreise mit einem festen Umlaufssinn, und zwar sollen alle $(4k + 1)$-gliedrigen Kreise ($k = 0, 1, 2, \ldots$) den positiven Umlaufssinn (gegen den Uhrzeiger) und die $(4k + 3)$-gliedrigen den negativen Umlaufssinn erhalten.



$(1, 12, 123) = \sphericalangle\, \alpha$

Fig. 1a.

Den Winkel zwischen zwei solchen gerichteten Kreisen K und K' im Schnittpunkt P definieren wir durch diejenige Drehung im positiven Umlaufssinn, durch die die positive Tangentenrichtung von K in P in die positive Tangentenrichtung von K' in P übergeführt wird. Wir bezeichnen diesen Winkel mit (K, P, K'), wo für K, K' und P die Symbolbezeichnungen einzusetzen sind. Ein Beispiel ist in Figur 1 a dargestellt.

Mit diesen Winkeln rechnen wir mod. 2π. Man erkennt sofort die Richtigkeit der folgenden Rechenregeln:

1. *Vertauschung:*

$$(K, P, K') = -(K', P, K).$$

2. *Spiegelung:*

$$(K, P, K') = -(K, P', K'),$$

wo P' der von P verschiedene Schnittpunkt von K und K' ist.

3. *Aufspaltung:*

$$(K, P, K') = (K, P, K'') + (K'', P, K'),$$

wo K'' ein weiterer durch P gehender Kreis ist.

§ 2. Die Konfiguration $(2^{n-1}, n)$.

1. *Vorbereitende Hilfssätze.* Wir betrachten n-Ecke aus Kreisbogen. Die einzelnen Bogen wollen wir auch Seiten nennen und wollen von einem regulären Kreisbogen-n-Eck sprechen, wenn die Verlängerungen der Seiten sich alle in einem Punkt schneiden. Dann gilt

Hilfssatz 1. *In einem regulären Kreisbogen-n-Eck mit den Seiten* $1, 2, 3, \ldots, n$ *und den Ecken* $(12), (23), \ldots, (n1)$ *gilt für die zyklische Winkelsumme* [3]*:*

$$S \equiv (1, 12, 2) + (2, 23, 3) + \cdots + (n, n1, 1) \equiv 0.$$

Beweis. Für die zyklische Winkelsumme S' im gemeinsamen Schnittpunkt aller Seiten gilt nach der Aufspaltungsregel:

$$S' \equiv (1, 0, 2) + (2, 0, 3) + \cdots + (n, 0, 1) \equiv 0.$$

Wird jetzt gespiegelt und vertauscht, dann erhält man gerade die zu beweisende Behauptung.

Damit ist gezeigt, daß die Bedingung $S \equiv 0$ notwendig ist für die Regularität von Kreisbogen-n-Ecken. Es gilt aber auch

Hilfssatz 2. *Die Bedingung* $S \equiv 0$ *ist im Falle* $n = 3$ *auch hinreichend für die Regularität.*

Beweis. Wir beweisen dies indirekt. Im Dreieck ABC (Fig. 2) gelte die Voraussetzung $S \equiv 0$. Geht jetzt AB nicht durch den Schnittpunkt (0) von AC und BC, so kann man durch A, B und (0) einen neuen Kreis ziehen, der die Winkel bei A und B offenbar entweder beide vergrößert oder beide verkleinert. Im neuen Dreieck ist nun

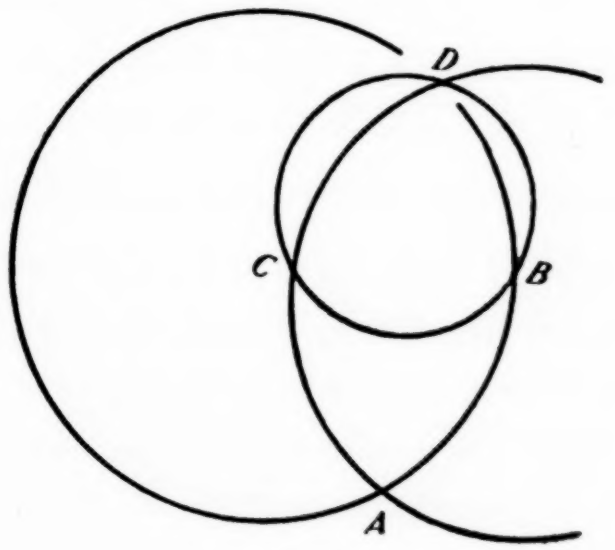


Fig. 2.

[3]) Alle Kongruenzen sind mod. 2π zu nehmen.

$S \equiv 0$ nach Hilfssatz 1. Das ergibt einen Widerspruch zur Voraussetzung und mithin gilt die Behauptung.

Wir beweisen nun noch den

Hilfssatz 3. *Liegen von den acht Schnittpunkten von vier sich zyklisch schneidenden Kreisen* 1, 2, 3, 4 *vier* (*aus jedem Paar einer*) *auf einem Kreis, so gilt dies auch für die vier anderen* (Fig. 3).

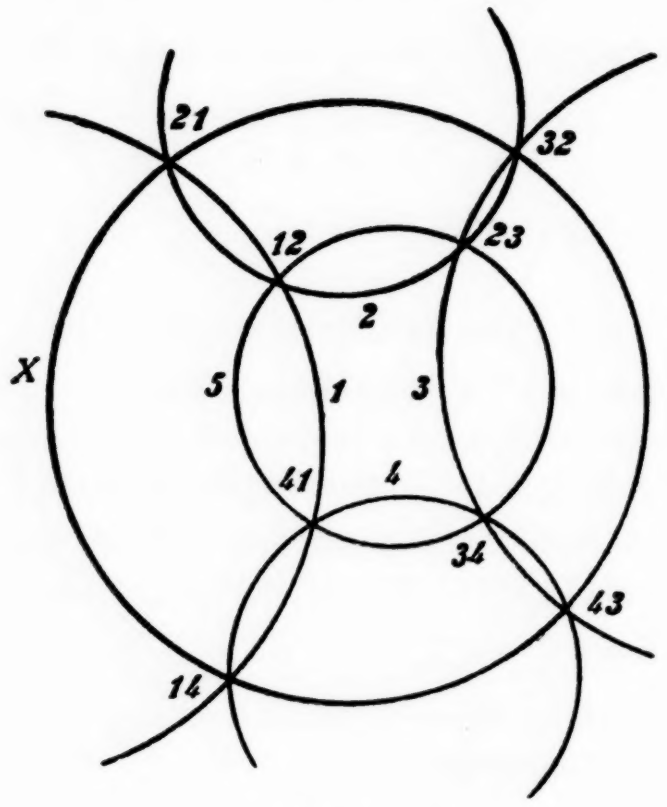


Fig. 3.

Beweis. Nach Voraussetzung sollen auf (5) die Punkte (12), (23), (34), (41) liegen. Nun ziehe man durch (21), (32), (43) einen Kreis (x). Damit nun (x) auch durch (14) geht, ist zu zeigen, daß das aus den drei Kreisen (1), (4), (x) durch ihn gebildete Dreieck (41), (43), (21) eine mod. 2π verschwindende Winkelsumme hat; denn dann folgt nach Hilfssatz 2 unsere Behauptung. Es ist also die Kongruenz

$$(4, 41, 1) + (1, 21, x) + (x, 43, 4) \equiv 0$$

zu beweisen [4]). Nun gelten aber die folgenden Kongruenzen:

$$(4, 41, 1) + (1, 41, 5) + (5, 41, 4) \equiv 0,$$
$$(x, 43, 4) + (4, 43, 3) + (3, 43, x) \equiv 0,$$
$$(1, 21, x) + (x, 21, 2) + (2, 21, 1) \equiv 0,$$
$$(2, 23, 3) + (3, 23, 5) + (5, 23, 2) \equiv 0.$$

Wird jetzt vertauscht, gespiegelt und addiert und beachtet man

$$(5, 12. 1) + (1, 12, 2) + (2, 12, 5) \equiv 0,$$
$$(4, 34, 5) + (5, 34, 3) + (3, 34, 4) \equiv 0,$$
$$(x, 32, 3) + (3, 32, 2) + (2, 32, x) \equiv 0,$$

so erhält man gerade die obige für den Beweis unseres Satzes notwendige Kongruenz.

2. *Beweis der Existenz der Konfiguration* $(2^{n-1}, n)$. Wir wollen in diesem Abschnitt den folgenden Satz beweisen:

[4]) In Figur 3 sind die Bezeichnungen nicht wie in Figur 1 gewählt, da eine andersartige Konfiguration vorliegt.

Satz 1. *Die Kreis-Punkt-Konfiguration* $(2^{n-1}, n)$ *existiert für jedes* $n \geqq 1$.

Beweis [5]). Unsere Behauptung soll besagen, daß es Konfigurationen von 2^{n-1} Kreisen und ebensoviel Punkten gibt, derart, daß auf jedem Kreis n Punkte liegen und durch jeden Punkt n Kreise gehen. Für die Fälle $n = 1, 2, 3$ ist der Satz trivial:

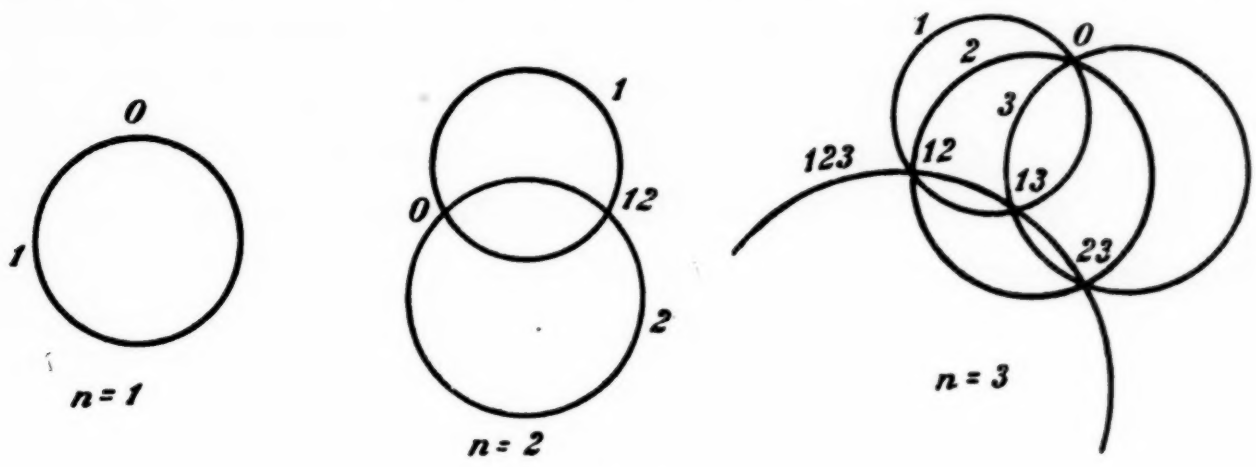


Fig. 4.

Im Falle $n = 4$ werden wir zu einem kreisgeometrischen Analogon des Euklidischen Satzes vom Steinerschen Punkt eines vollständigen Vierseits geführt.

Wir beweisen zunächst die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ einzeln und werden dann den allgemeinen Existenzbeweis durch einen Schluß von n auf $n + 2$ erbringen.

Der Fall $n = 4$.

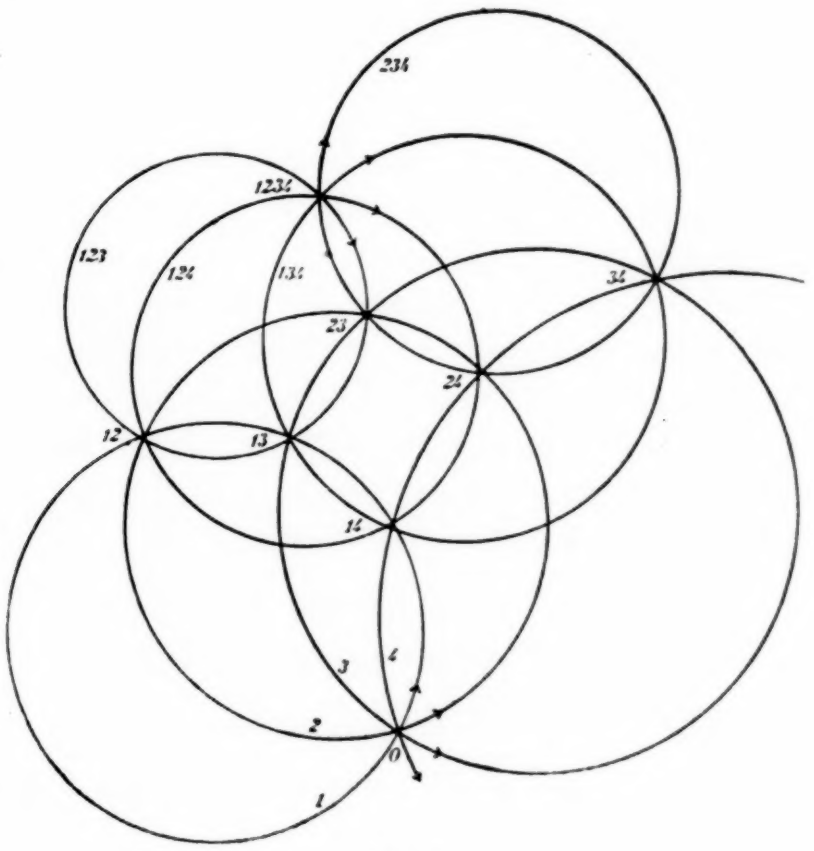


Fig. 5.

Die vier Kreise (123), (124), (134), (234) werden durch den Punkt (1234) gezogen. Ihre sechs weiteren Schnittpunkte sind dann (12), (13), (14), (23), (24), (34). Nun lassen sich die Kreise in vier verschiedene Tripel zusammenfassen und ganz entsprechend ihre sechs Schnittpunkte. Durch jedes Tripel dieser Punkte kann man einen neuen Kreis ziehen und erhält so die Kreise (1), (2), (3), (4). Unsere Behauptung lautet jetzt: Diese Kreise schneiden

[5]) Anfänge für den Beweis dieses Satzes finden sich schon bei A. Miquel, Liouville Journal **10** (1845), 349; einen recht unübersichtlichen synthetischen Beweis gibt Clifford, Synthetic Proof of Miquel's Theorem, Ges. Werke S. 38.

sich in einem Punkt (0). Die entstehende Figur ist dann eine (8, 4)-Konfiguration. Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß je drei von diesen vier Kreisen durch einen Punkt gehen, z. B. (1), (2), (3). Dazu genügt nach Hilfssatz 2, daß

$$S \equiv (1, 12, 2) + (2, 23, 3) + (3, 13, 1) \equiv 0$$

gilt. Nun ist nach unserer Aufspaltungsregel

$$(1, 12, 2) \equiv (1, 12, 124) + (124, 12, 2),$$
$$(2, 23, 3) \equiv (2, 23, 234) + (234, 23, 3),$$
$$(3, 13, 1) \equiv (3, 13, 134) + (134, 13, 1).$$

Durch Spiegelung und Vertauschung folgt daraus:

$$(1, 12, 2) \equiv (124, 14, 1) + (2, 24, 124),$$
$$(2, 23, 3) \equiv (234, 24, 2) + (3, 34, 234),$$
$$(3, 13, 1) \equiv (134, 34, 3) + (1, 14, 134).$$

Wir fassen die Winkel an gleichen Punkten zusammen:

$$S \equiv (124, 14, 134) + (234, 24, 124) + (134, 34, 234).$$

Eine nochmalige Spiegelung und Vertauschung ergibt

$$S \equiv (134, 1234, 124) + (124, 1234, 234) + (234, 1234, 134),$$

mithin

$$S \equiv 0 \mod 2\pi.$$

Damit ist der Fall $n = 4$ erledigt.

Der Fall $n = 5$.

Zu der Konfiguration (16, 5) gelangen wir auf folgende Weise. Wir legen durch einen Punkt (0) die fünf Kreise (1), (2), (3), (4), (5). Die weiteren Schnittpunkte bezeichnen wir mit (12), (23), (13), . . ., (45). (S. Fig. 1, $n = 5$). Da wir nun diese fünf Kreise in fünf Gruppen zu je vier zusammenfassen können, erhalten wir am Ende fünf „Schlußpunkte" im Sinne des Falles $n = 4$ und zwar (1234), (1235), (1245), (1345), (2345). Wir haben jetzt zu zeigen, daß diese fünf Punkte auf einem Kreis (12345) liegen,

Wir beweisen dies unter Benutzung des Hilfssatzes 3. Es genügt zu zeigen, daß die Punkte immer zu je vier auf einem Kreis liegen, z. B. (1234), (1235), (1245), (1345). Die sich in diesen Punkten zyklisch schneidenden Kreise sind:

(1234) und (1235) liegen auf (123),
(1235) und (1245) liegen auf (125),
(1245) und (1345) liegen auf (145),
(1345) und (1234) liegen auf (134).

Die weiteren Schnittpunkte dieser Kreise sind:

(123) und (125) schneiden sich in (12),
(125) und (145) schneiden sich in (15),
(145) und (134) schneiden sich in (14),
(134) und (123) schneiden sich in (13).

Die Punkte (12), (13), (14), (15) liegen alle auf dem Kreis (1). Damit sind alle Voraussetzungen für die Anwendung des Hilfssatzes 3 erfüllt und man folgert, daß die Punkte (1234), (1235), (1245), (1345) auf einem Kreis liegen. Damit ist auch der Fall $n = 5$ erledigt.

Der allgemeine Fall $n > 5$.

Der allgemeine Fall kann durch einen Schluß von n auf $n + 2$ erledigt werden. Man erkennt nämlich sofort, daß die Beweise für die Fälle $n = 4$ und $n = 5$ ihrer Struktur nach bereits Induktionsschlüsse von n auf $n + 2$ sind, die sich immer wiederholen lassen.

Man schließt wie folgt: Der Satz gelte für ein gerades n; die Konfiguration liefert dann einen „Schlußpunkt n-ten Grades". Für $n + 1$ ergeben sich dann $n + 1$ solche Schlußpunkte, von denen man, wie im Falle $n = 5$ zeigt, daß sie stets zu je vier auf einem Kreis liegen. — Alsdann liefert der Fall $n + 2$ insgesamt $n + 2$ „Schlußkreise $(n + 2)$-ten Grades". Von diesen zeigt man wieder, wie im Fall $n = 4$, daß stets je drei von ihnen durch einen Punkt gehen.

Mit diesem Hinweis ist die Aufgabe dieses Abschnittes, die Existenz aller Konfigurationen $(2^{n-1}, n)$ zu beweisen, vollständig gelöst.

3. *Beweis einer Winkelbeziehung.* Wir wenden uns nun einer auffallenden Symmetrieeigenschaft der Konfigurationen $(2^{n-1}, n)$ zu. Es handelt sich um das Verhalten der Winkel zwischen den einzelnen Kreisen an den verschiedenen Punkten. Wir definieren zunächst: Punkte, in denen die zwischen den gerichteten Kreisen durch sie auftretenden Winkel nach Größe und Reihenfolge gleich sind, heissen *äquivalent*. Man erkennt sofort, daß diese Äquivalenz-Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. — Wir beweisen nun den folgenden Satz:

Satz 2. *Alle Punkte einer jeden Kreis-Punkt-Konfiguration $(2^{n-1}, n)$ sind äquivalent.*

Beweis. Wir bezeichnen die Kreise und Punkte wieder wie vorher und erinnern an die Festsetzung des Umlaufssinnes der Kreise; alle $(4n + 3)$-gliedrigen Kreise gehen mit, alle $(4n + 1)$-gliedrigen gehen gegen den Uhrzeigersinn. — Für $n = 2$ ist die Behauptung trivial. Wir beweisen den Satz für $n = 3$ und zeigen dann seine allgemeine Gültigkeit durch einen Schluß von n auf $n + 1$.

Der Fall $n = 3$.

Nach Hilfssatz 1 gilt:

$$(2, 0, 3) + (3, 13, 123) + (123, 12, 2) \equiv 0,$$
$$(3, 23, 2) + (2, 12, 1) + (1, 13, 3) \equiv 0,$$
$$(2, 12, 1) + (1, 12, 123) + (123, 12, 2) \equiv 0,$$
$$(1, 13, 3) + (3, 13, 123) + (123, 13, 1) \equiv 0.$$

Subtrahiert man nun die zweiten beiden Kongruenzen von den ersten und beachtet, daß $(2, 0, 3) \equiv (3, 23, 2)$ und $(1, 12, 123) \equiv (123, 13, 1)$ ist, so folgt:

$$(2, 0, 3) \equiv (1, 12, 123)$$

und in gleicher Weise:

$$(1, 0, 2) \equiv (3, 13, 123).$$

Die Gleichheit der übrigen Winkel folgt durch einfache Spiegelung und Vertauschung:

$$(1, 0, 2) \equiv (2, 12, 1) \equiv (3, 13, 123) \equiv (123, 23, 3)$$
$$(2, 0, 3) \equiv (3, 23, 2) \equiv (1, 12, 123) \equiv (123, 13, 1).$$

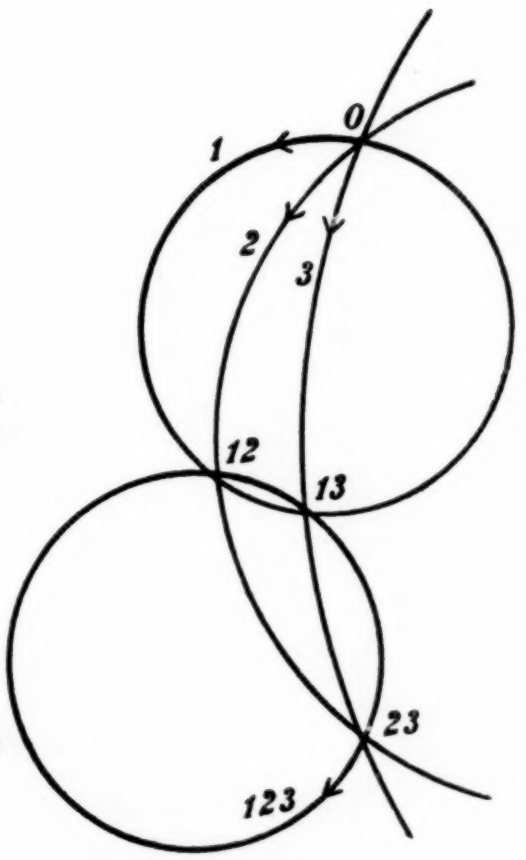


Fig. 6.

Damit ist der Satz für $n = 3$ bewiesen; insbesondere ergibt unsere Bezeichnung auch die Behauptung über die gleichsinnige Reihenfolge der Winkel an den einzelnen Punkten.

Der allgemeine Fall $n > 3$.

Der allgemeine Fall wird durch Schluß von n auf $n + 1$ bewiesen. Wir haben die folgenden Fälle zu unterscheiden:

a) n sei ungerade und $n \geqq 3$. Dann gibt es einen n-gliedrigen Schlußkreis und Punkte bis zu $n - 1$ Gliedern, die also nach Induktionsannahme alle äquivalent sein sollen. Der Fall $n + 1$ liefert nun weitere Punkte bis zu $n - 1$ Gliedern und einen $(n + 1)$-gliedrigen Schlußpunkt. Die Äquivalenz aller Punkte bis zu $n - 1$ Gliedern folgt durch Überlagerung daraus, daß man die Induktionsannahme nicht nur auf die Kreise $1, 2, \ldots, n$ anwendet, sondern auch auf alle anderen n-gliedrigen Kombinationen aus der Reihe $1, 2, 3, \ldots, n, n + 1$.

Um die Äquivalenz des $(n + 1)$-gliedrigen Schlußpunktes zu erkennen, betrachte man ihn einfach als Ausgangspunkt der Konfiguration; als solcher muß er nach Induktionsannahme mit den übrigen mindestens zweigliedrigen Punkten äquivalent sein. Auf Grund der Transitivität der Äquivalenz folgt dann unsere Behauptung.

b) n sei gerade und $n \geqq 4$. Dann liefert der Fall $n + 1$ außer weiteren Punkten bis zu $n - 2$ Gliedern noch n neue n-gliedrige Punkte, die alle auf einem $(n + 1)$-gliedrigen Schlußkreis liegen. Die Äquivalenz aller Punkte bis zu $n - 2$ Gliedern folgt wie oben, und um endlich die Äquivalenz der n-gliedrigen Punkte mit den übrigen einzusehen, nehme man einfach einen n-gliedrigen Punkt, z. B.: $(123 \ldots n)$, als Ausgangspunkt der Konfiguration; dann wird der Kreis $(n + 1)$ der Schlußkreis und auf Grund der Transitivität folgt wieder die Richtigkeit unserer Behauptung.

Figur für den Fall $n = 4$.

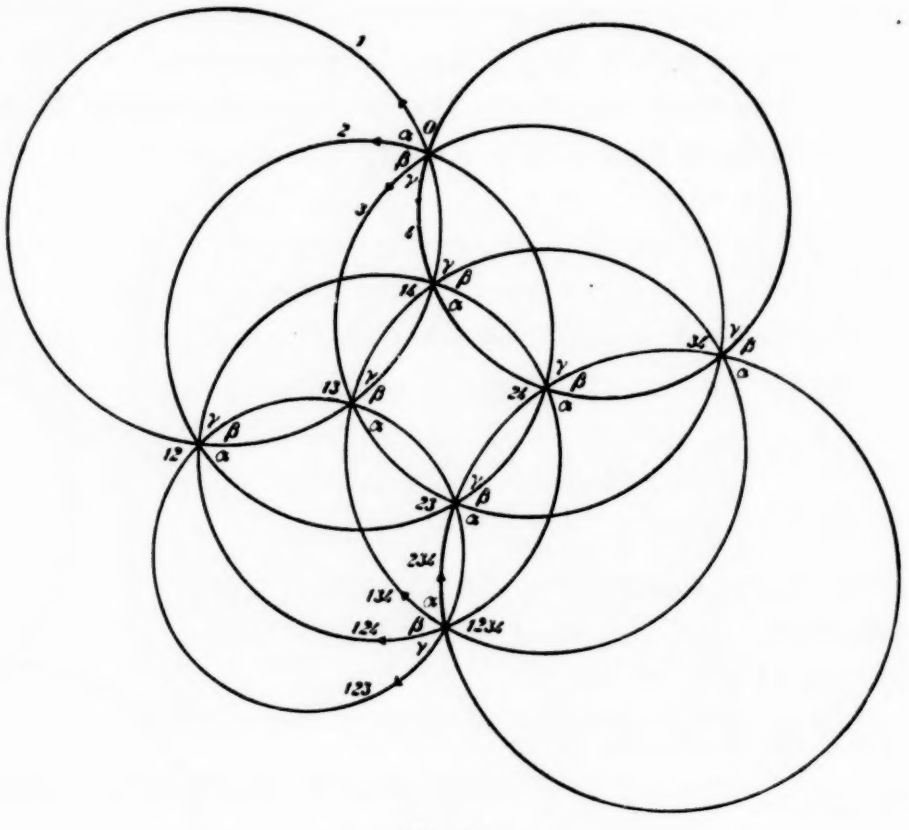


Fig. 6a.

§ 3. Einfach-gespiegelte Konfigurationen.

Die Untersuchungen dieses und des nächsten Paragraphen entstanden durch folgende Fragestellung: Wir haben gesehen, daß gewisse Anordnungen von Punkten in der Ebene zu $(2^{n-1}, n)$-Kreis-Punkt-Konfigurationen ergänzt werden können durch das Ziehen der entsprechenden Kreise. Es liegt nun nahe zu fragen, ob auch die Mittelpunkte dieser Kreise — oder allgemeiner die Spiegelpunkte eines weiteren festen Punktes an diesen Kreisen — wieder die Punkte einer solchen Konfiguration darstellen. Falls dies zu bejahen

ist, wird man fragen, ob dann umgekehrt auch die erste Konfiguration in gleicher Weise aus der zweiten hervorgeht.

Wir betrachten zwei $(2^{n-1}, n)$-Konfigurationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit den Kreisen A_i und B_i und den Punkten a_i und b_i und definieren:

Die Konfigurationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *einfach-gespiegelt*, wenn es einen Punkt P gibt, so daß seine Spiegelbilder an den A_i die b_i und seine Spiegelbilder an den B_i die a_i liefern. Wir behaupten nun den folgenden Satz [6]):

Satz 3. *Es existieren einfach-gespiegelte Paare von* $(2^{n-1}, n)$*-Konfigurationen für jedes* $n \geqq 1$.

Beweis. Wir werden Konstruktionsverfahren für jedes n angeben und zunächst die Fälle $n = 1, 2, 3$ explizit behandeln. Wir werden dann erkennen, daß der Satz allgemein gilt.

Der Fall $n = 1$.

Gegeben sei ein Kreis A und ein Punkt a auf ihm; wir schlagen jetzt um a einen Kreis B durch den Mittelpunkt b von A. Nun erfüllt der unendlich-ferne Punkt als Spiegelungszentrum offenbar die Bedingungen der Einfach-Spiegelung. Natürlich kann man dieses Zentrum nun durch weitere Spiegelung der ganzen Figur an einem festen Kreis in einen endlichen Punkt transformieren. Damit ist dieser Fall erledigt.

Der Fall $n = 2$.

Wir gehen von zwei sich schneidenden Kreisen A_1 und A_2 mit gleichem Radius aus. Ihre Schnittpunkte seien a_1 und a_2 und ihre Mittelpunkte b_1 und b_2. Wenn wir nun die Kreise B_1 und B_2 um a_1 bzw. a_2 durch b_1 und b_2 ziehen, können wir wieder wie im Fall $n = 1$ schließen.

Der Fall $n = 3$.

Wir haben nun drei gleich große Anfangskreise A_1, A_2, A_3 mit den Mittelpunkten b_i und den vier Schnittpunkten a_i zu wählen (Figur 7). Damit wir wieder wie vorher schließen können, müssen wir zeigen, daß der Schlußkreis A_4 denselben Radius wie die Anfangskreise hat.

In der Figur 7 sind die gleichbezeichneten Winkel nach dem Peripheriewinkelsatz gleich. Also ist

$$\sphericalangle\, a_1 o a_2 + \sphericalangle\, a_1 a_3 a_2 = \pi.$$

Sei P beliebig auf A_3, dann ist

$$\sphericalangle\, a_1 o a_2 + \sphericalangle\, a_1 P a_2 = \pi.$$

Daher folgt:

$$\sphericalangle\, a_1 a_3 a_2 = \sphericalangle\, a_1 P a_2.$$

Aus dieser Winkelgleichheit über gleichen Bögen folgt dann sofort die behauptete Radiengleichheit. — Wir können also jetzt um die a_i die Kreise B_i durch die entsprechenden b_i ziehen und dann diesen Fall wieder wie die vorangehenden behandeln.

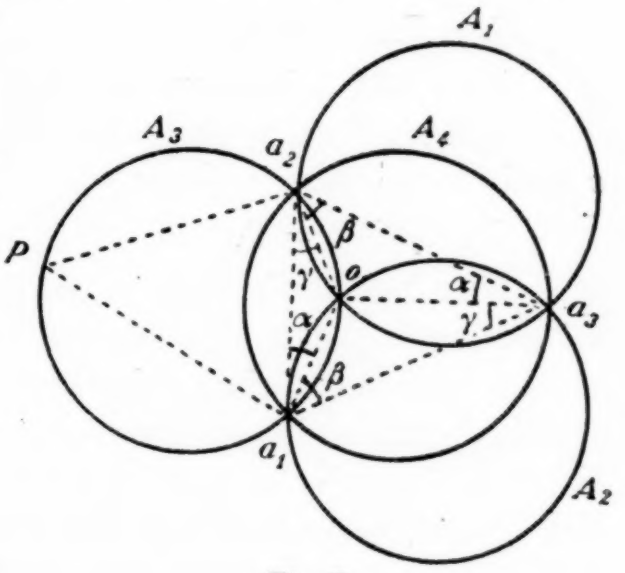


Fig. 7.

Der allgemeine Fall.

Wir gehen von n gleichen Kreisen durch (0) aus und finden sofort auf Grund der obigen Bemerkung über die Radiengleichheit, daß alle auftretenden Kreise A_i und B_i gleich groß sind, und es läßt sich also auch wieder der bisherige Schluß anwenden. — Damit ist unser Satz 3 bewiesen.

---

[6]) Bei Drucklegung dieser Arbeit wurde durch ein Referat im Zentralblatt noch bekannt, daß auch Venkataraman wahrscheinlich ähnliche Fragen behandelt hat; siehe Zentralbl. f. Math. **20**, S. 388.

Wir hätten diese Einfach-Spiegelung auch als einfachen Spezialfall der nun zu betrachtenden Doppelt-Spiegelung erhalten können, haben aber der Übersichtlichkeit wegen diese Darstellung gewählt.

§ 4. Doppelt-gespiegelte Konfigurationen.

Im Anschluß an unsere Untersuchung der Einfach-Spiegelung ist es nun naheliegend, nach einem Sachverhalt zu fragen, der durch die folgende Definition charakterisiert wird: Wir betrachten wieder zwei $(2^{n-1}, n)$-Konfigurationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit den Kreisen A_i und B_i und den Punkten a_i und b_i. Dann sollen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *doppelt-gespiegelt* heißen, wenn es zwei verschiedene Punkte $P(a)$ und $P(b)$ gibt derart, daß die Spiegelbilder von $P(a)$ an den A_i die b_i und die von $P(b)$ an den B_i die a_i liefern. Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz solcher Paare zu und beweisen schrittweise den folgenden Satz:

Satz 4. *Es existieren doppelt-gespiegelte Paare von* $(2^{n-1}, n)$*-Konfigurationen für jedes* $n \geqq 1$.

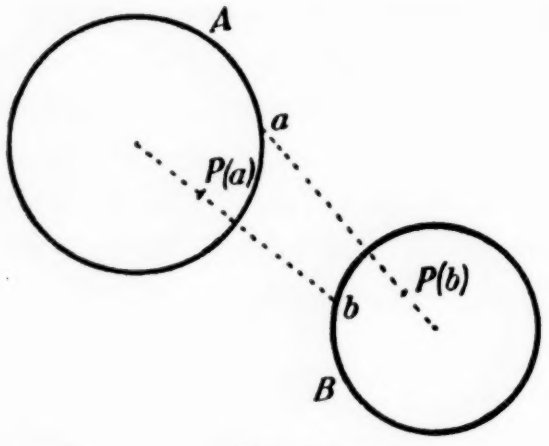


Fig. 8.

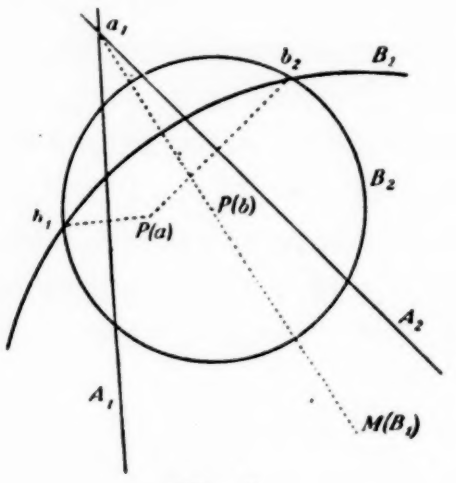


Fig. 9.

Der Fall $n = 1$.

Hier gilt trivialerweise, daß je zwei beliebige (1, 1)-Konfigurationen doppelt-gespiegelt zueinander sind. Um $P(a)$ und $P(b)$ zu finden, braucht man nur b an A und a an B zu spiegeln (s. Figur 8).

Der Fall $n = 2$.

Hier gilt noch, daß es zu jeder (2, 2)-Konfiguration unendlichviele doppelt-gespiegelte gibt. Dies folgt so: Als Ausgangskreise wählen wir die beiden Geraden A_1 und A_2 mit dem eigentlichen Schnittpunkt a_1 und dem uneigentlichen a_2. $P(a)$ wird beliebig gewählt; seine Spiegelbilder an A_1 und A_2 seien b_1 und b_2; nun ziehen wir einen beliebigen Kreis B_1 durch b_1, b_2. Das Spiegelbild von a_1 an ihm sei $P(b)$. Da $a_1P(b)$ Mittelsenkrechte auf b_1b_2 ist, kann man nun um $P(b)$ durch b_1, b_2 den Kreis B_2 ziehen. Jetzt sind alle Bedingungen der Doppelt-Spiegelung erfüllt:

$$P(a) \text{ an } A_1 \text{ gibt } b_1,\ P(b) \text{ an } B_1 \text{ gibt } a_1,$$
$$P(a) \text{ an } A_2 \text{ gibt } b_2,\ P(b) \text{ an } B_2 \text{ gibt } a_2.$$

Aus der entstandenen Figur lassen sich offenbar durch weitere Spiegelung der allgemeine Fall, bei dem alle Punkte im Endlichen liegen, und der Fall, in dem $P(a)$ oder $P(b)$ uneigentlich wird, herleiten. Wird endlich $P(a)$ auf der Winkelhalbierenden zwischen A_1 und A_2 gewählt, so kann man offenbar B_1 so ziehen, daß $P(a)$ und $P(b)$ zusammenfallen, und wir haben wieder die Einfach-Spiegelung mit endlichem Zentrum.

Es soll schon jetzt darauf hingewiesen werden, daß $P(a)$ und $P(b)$ nach dem Leitkreissatz die Brennpunkte einer Ellipse mit den Tangenten A_1 und A_2 sind. Ferner ist

für das Folgende noch wichtig festzustellen, daß die Figur eindeutig bestimmt ist, wenn A_1, A_2, $P(a)$ und B_1 fest gewählt sind. — Diese letzte Bemerkung erlaubt uns auch, die folgenden Fälle direkt zu konstruieren.

1. *Alle Punkte seien eigentliche Punkte.* Man wähle A_1, A_2 und den Punkt $P(a)$ mit den Spiegelbildern b_1, b_2 an A_1, A_2; man zeichne nun B_1 durch b_1, b_2; das Spiegelbild von a_1 an ihm sei $P(b)$. Der Mittelpunkt von B_2 muß jetzt wegen der oben angemerkten Eindeutigkeit der Konstruktion erstens auf der Mittelsenkrechten von b_1b_2 und zweitens auf der Verbindungslinie von a_2 mit $P(b)$ liegen. Damit ist nun wieder der für die Doppelt-Spiegelung charakteristische Sachverhalt gegeben (Figur 10):

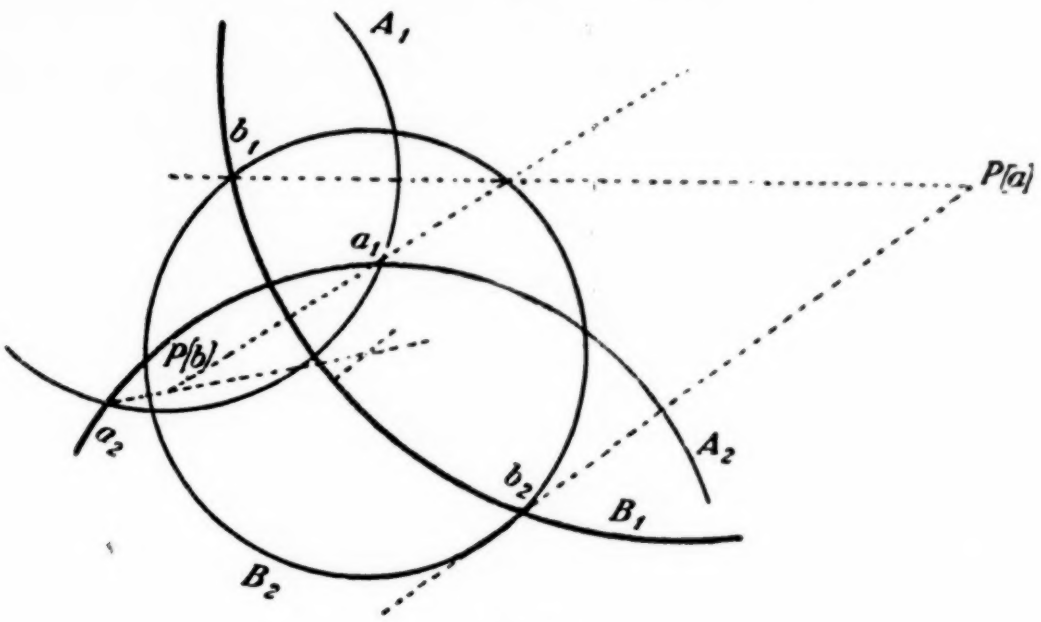


Fig. 10.

2. *Ein uneigentliches Zentrum.* Wir wählen A_1, A_2 und den unendlich fernen Punkt als $P(a)$; dann sind b_1 und b_2 die Mittelpunkte von A_1 und A_2. Die weitere Konstruktion verläuft dann wie im vorigen Fall (Figur 11). Wir erkennen hier aber noch einen später zu benutzenden Sachverhalt: Nach Konstruktion ist a_1a_2 parallel zu $M(B_1)$, $M(B_2)$, der Verbindungslinie der Mittelpunkte von B_1 und B_2. Damit haben wir den Fall $n = 2$ der Doppelt-Spiegelung vollständig erledigt.

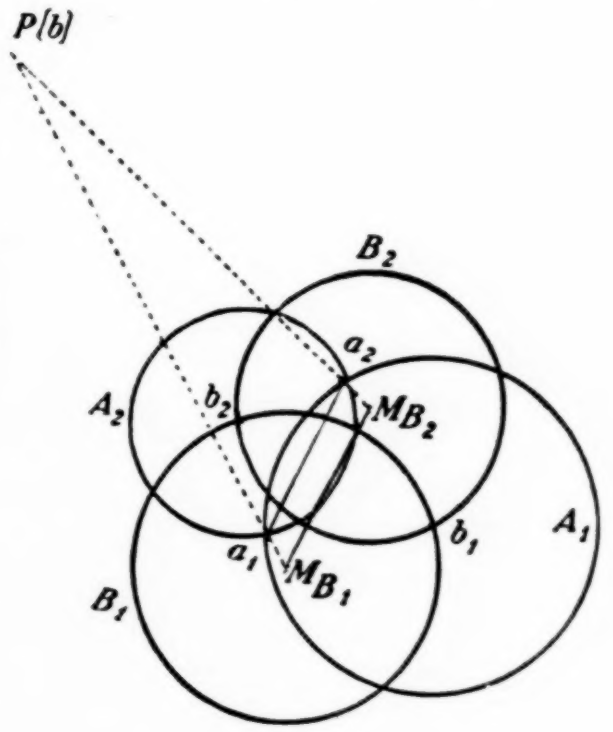


Fig. 11.

Wir wenden uns nunmehr dem Fall $n = 3$ zu. Bei diesem Falle erscheinen die wesentlichen Schwierigkeiten für den allgemeinen Beweis unseres Satzes 4; hernach folgen nur noch einfache Schlüsse. Dennoch wird es gelingen, diesen Fall auch elementargeometrisch zu erledigen.

Der Fall $n = 3$.

Gegeben seien vier Punkte a, b, c, d (s. Fig. 12). Ferner die vier Kreise durch sie:

$A = (bcd)$, $B = (acd)$, $C = (abd)$ und $D = (abc)$.

Dann sei F_2 ein beliebiger Punkt und seine Spiegelbilder an A, B, C, D seien a', b', c', d', in Zeichen $F_2/A = a'$, $F_2/B = b'$ usw. Nun betrachten wir noch die Kreise $A' = (b'c'd')$, $B' = (a'c'd')$ und entsprechend C' und D'. In der Figur 12 a ist F_2 der unendlichferne Punkt, also a' der Mittelpunkt von A usw. Wir wollen nun zeigen, daß zwischen diesen beiden (4, 3)-

Konfigurationen eine Doppeltspiegelung besteht; dafür ist zu beweisen, daß

(I) $$a/A' = b/B' = c/C' = d/D' = F_1$$

ist.

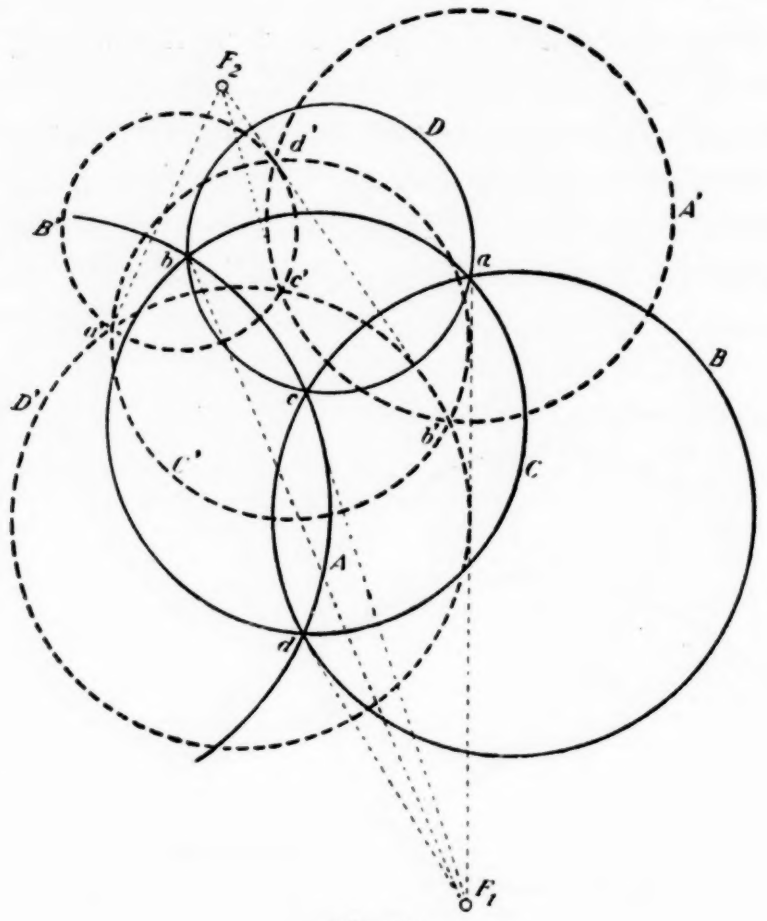


Fig. 12.

Doppeltspiegelung für den Fall $n = 3$.

(F_1 an den gestrichelten Kreisen A', B', C', D' gespiegelt ergibt die Punkte a, b, c, d; F_2 an den ausgezogenen Kreisen A, B, C, D gespiegelt ergibt die Punkte a', b', c', d'.)

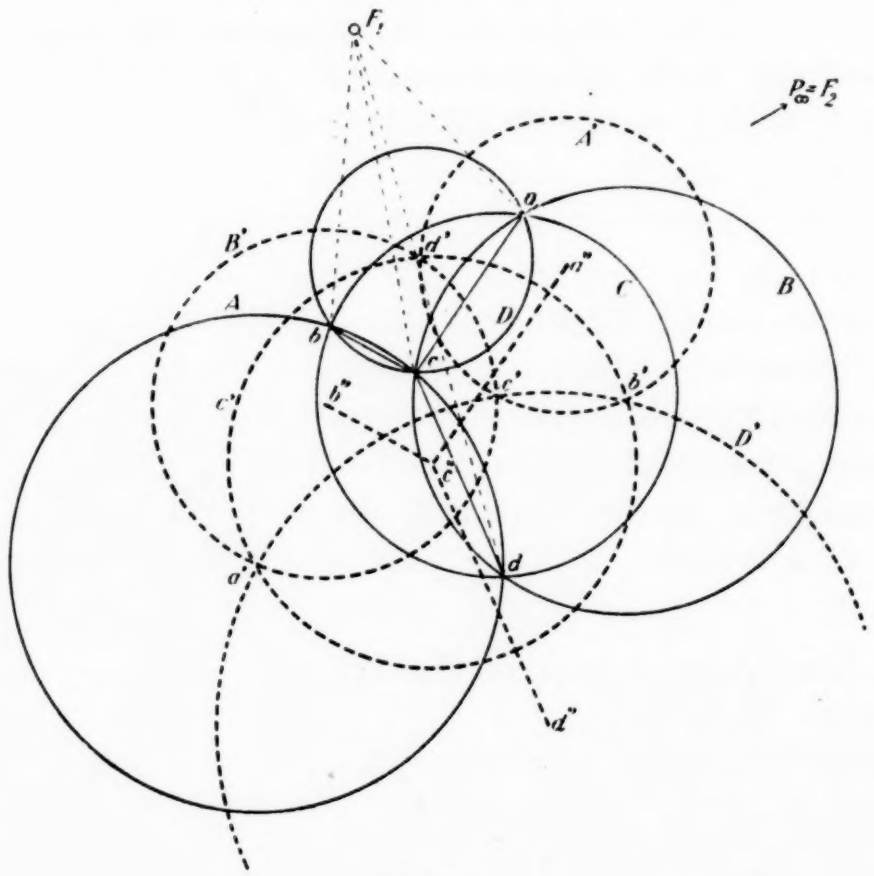


Fig. 12a.

Doppeltspiegelung für den Fall $n = 3$.

(F_2 ist hier der unendlich ferne Punkt. Die Grundkonfiguration K_0 ist voll gezeichnet; die erste gespiegelte Konfiguration K_1 ist gestrichelt gezeichnet, und der Streckenzug a'', b'', c'', d'' deutet die Punkte der zweiten gespiegelten Konfiguration K_1 an.)

Bevor wir dies beweisen, betrachten wir zwei bezüglich eines Dreiecks *bcd* isogonale Punkte F_1 und F_2 — solche Punkte sind bekanntlich dadurch definiert, daß die in Figur 13 gleichbezeichneten Winkel gleich sind — und beweisen kurz einen elementargeometrischen Hilfssatz, der eine andere Definition der isogonalen Lage zweier Punkte enthält.

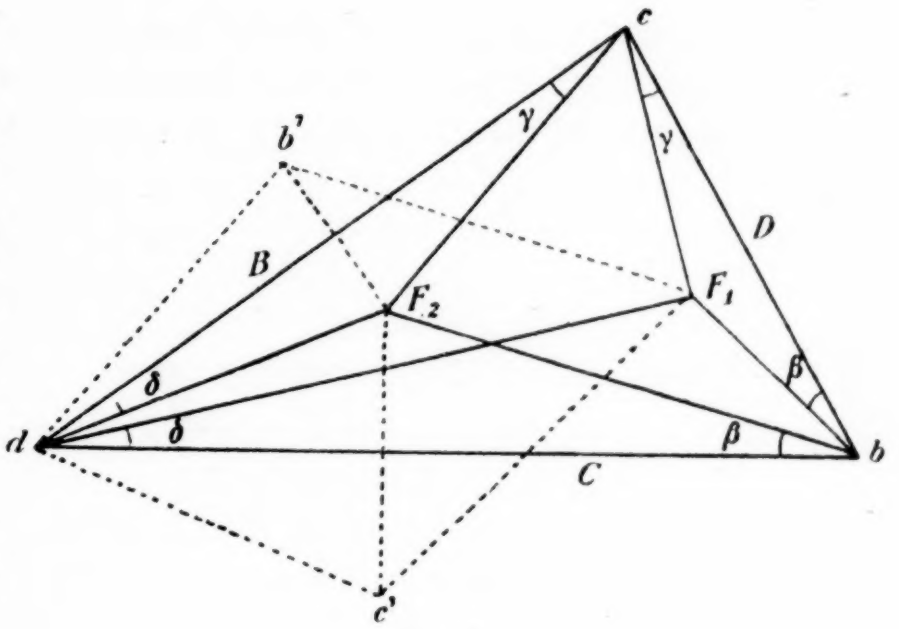


Fig. 13.

Hilfssatz 4. Wenn F_1 zu F_2 isogonal ist, so ist F_1 der Mittelpunkt des Kreises durch die drei Spiegelpunkte b', c', d' des Punktes F_2 an den Seiten B, C, D des Bezugsdreiecks.

Beweis. Es genügt zu zeigen: $F_1c' = F_1b'$. Es ist nun

$$c'd = F_2d = b'd,$$

und

$$\sphericalangle F_1dc' = \sphericalangle bdc = \sphericalangle F_1db'.$$

Daraus folgt aber die Behauptung.

Wir erinnern noch an die bekannte Tatsache, daß F_1 und F_2 hier die Brennpunkte einer Ellipse sind, die die drei Dreiecksseiten als Tangenten besitzt.

Ferner ist noch wichtig festzustellen, daß durch die Winkelbeziehungen die Punkte F_1 und F_2 eineindeutig einander zugeordnet sind; wir nennen den unendlichfernen Punkt a und benutzen wieder unsere Winkel-Schreibweise; dann drückt sich die Eindeutigkeit für isogonale Punkte dadurch aus, daß

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned}(F_1ab, b, C) &= (D, b, F_2ab)\\ (F_1ac, c, B) &= (D, c, F_2ac)\\ (F_1ad, d, B) &= (C, d, F_2ad)\end{aligned}$$

gilt.

Beweis für den Fall $n = 3$. Wir wollen also jetzt die Beziehung (I) beweisen und haben zunächst wieder die Figur 12. Wir bringen durch eine entsprechende Spiegelung den Punkt a ins Unendliche und erhalten Figur 14. Wir zeigen nun einen Zusammenhang zwischen den beiden Zentren einer Doppelt-Spiegelung und einem Paar von isogonalen Punkten auf. Dazu beweisen wir die Existenz eines Punktes F_1, für den gleichzeitig die folgenden sechs Winkelbeziehungen gelten:

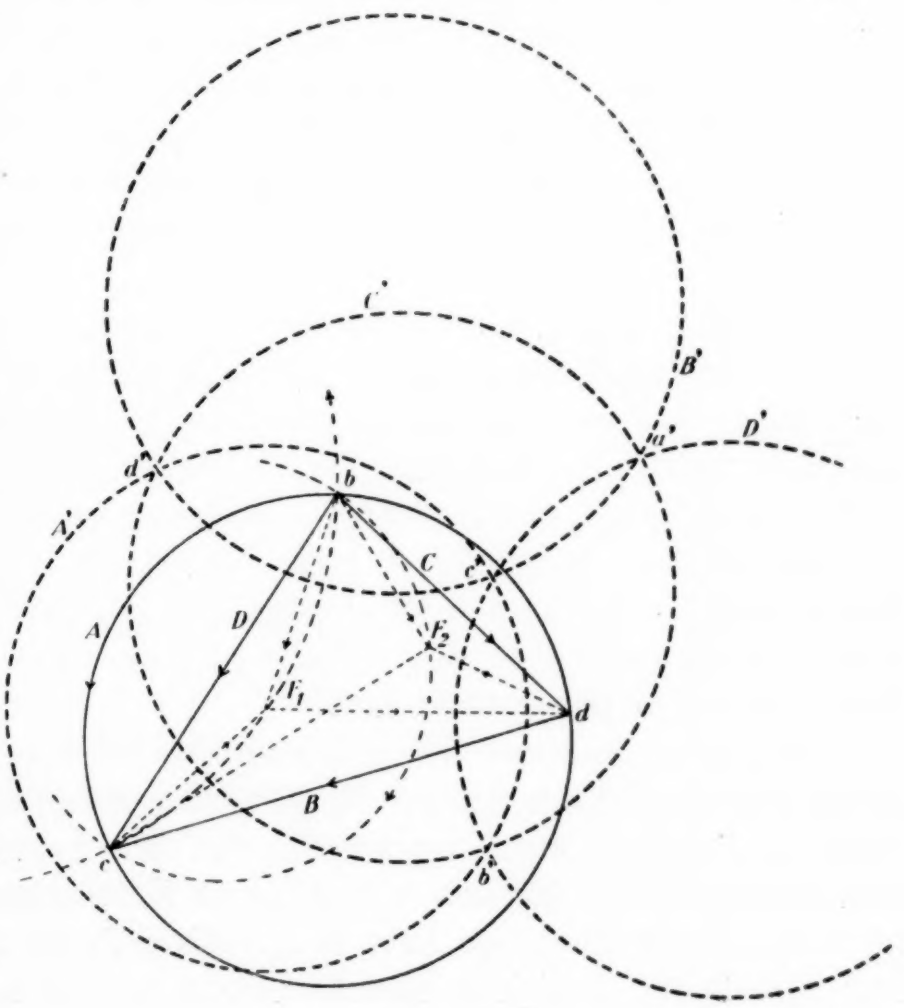


Fig. 14.

$$
\text{(III)}\quad
\begin{aligned}
&(1) && (F_1ab, b, C) = (D, b, F_2ab),\\
&(2) && (F_1ac, c, B) = (D, c, F_2ac),\\
&(3) && (F_1ad, d, B) = (C, d, F_2ad),\\
&(4) && (F_1bc, b, A) = (D, b, F_2bc),\\
&(5) && (F_1cd, c, A) = (B, c, F_2cd),\\
&(6) && (F_1bd, d, A) = (C, d, F_2bd).
\end{aligned}
$$

Wir definieren F_1 als Spiegelbild von a an A':

$$a/A' = F_1.$$

Da dann F_1 nach Hilfssatz 4 isogonaler Punkt zu F_2 ist, gelten die Relationen (II), d. h. die drei ersten Relationen von (III). Durch sie ist auf Grund der Eindeutigkeit die Lage von F_1 bestimmt. Wir haben nun zu zeigen, daß die drei letzten Relationen von (III) aus den drei ersten folgen. Wir führen dies etwa für (4) durch. Es ist (Fig. 14)

$$(F_1bc, b, A) = (F_1bc, b, D) - (A, b, D)$$

nach der Aufspaltungsregel, ferner nach dem Euklidischen Satz vom Sehnen-Tangentenwinkel:

$$(F_1bc, b, D) = \sphericalangle\, bF_1c = \pi - \sphericalangle\, F_1bc - \sphericalangle\, F_1cb,$$
$$(A, b, D) = \sphericalangle\, bdc = \pi - \sphericalangle\, dbc - \sphericalangle\, dcb.$$

Setzen wir dies ein und beachten die Gültigkeit von (1) und (2), so folgt:

$$(F_1bc, b, A) = \sphericalangle\, F_2bc + \sphericalangle\, F_2cb.$$

Dies ist aber gerade nach demselben Satz von Euklid der Winkel (D, b, F_2bc). Damit ist (4) bewiesen; ganz entsprechend zeigt man die Gültigkeit von (5) und (6).

Damit ist nun der Beweis für den Fall $n = 3$ fast erledigt; denn wir haben den folgenden Sachverhalt: F_1 war definiert als Spiegelpunkt von a an A'; dann galten die sechs Gleichungen (III), die F_1 eindeutig festlegen. Wird nun F_1 als Spiegelpunkt von b an B' definiert, so erhalten wir auf einem entsprechenden Wege wieder *dieselben* sechs Gleichungen (III). Das Gleiche folgt bei der Definition $F_1 = c/C'$ und $F_1 = d/D'$. Daraus ergibt sich die Richtigkeit der Gleichung (I) und somit der Beweis des Satzes 4 für $n = 3$. Wir können nun noch durch eine geeignete Spiegelung F_2 in der Fig. 12 a in einen endlichen Punkt transformieren und haben dann die allgemeine Figur 12 für eine Doppeltspiegelung.

Der Fall $n \geqq 4$.

Im vorigen Fall konnten wir nach Wahl einer beliebigen (4, 3)-Konfiguration auch noch das eine Spiegelungszentrum F_2 beliebig wählen; dann war die Figur eindeutig bestimmt. Betrachten wir nun (8, 4)-Konfigurationen, die wir kurz *Achter* nennen wollen, dann ist nicht zu erwarten, daß die Mittelpunkte eines beliebigen Achters wieder zu einem Achter ergänzt werden können; unter Beachtung der Bemerkung zu Hilfssatz 4 würde das nämlich bedeuten, daß es zu vier Geraden und einem Punkt stets einen Kegelschnitt gibt, der diese Geraden als Tangenten und diesen Punkt als einen Brennpunkt hat.

Wir gehen nun von einem Achter aus, bei dem die Mittelpunkte der vier Anfangskreise auf einem Kreis liegen. F_2 sei wieder der unendlichferne Punkt wie in Fig. 12 a. Dann ist F_1 schon durch irgend drei von den Ausgangskreisen bestimmt; da aber die Mittelpunkte dieser Kreise alle auf einem Kreis liegen, erhält man für jede (4, 3)-Konfiguration innerhalb dieses Achters denselben Punkt F_1. So folgt unmittelbar aus dem Fall $n = 3$ die Gültigkeit unseres Satzes für $n = 4$. Man kann dieses Ergebnis auch durch folgenden Satz ausdrücken:

Liegen bei einem Achter K die Mittelpunkte von vier Kreisen, die durch einen Punkt a gehen, auf einem Kreis A', so bildet die Gesamtheit der Mittelpunkte der Kreise von K die Punkte eines neuen Achters K', und es gilt, daß die Spiegelpunkte der Punkte von K an den Kreisen von K' in einen Punkt F_1 zusammenfallen.

Die Figuren 15 und 16 zeigen den Spezialfall, daß F_2 unendlichferner Punkt ist, und den allgemeinen Fall. Diese Behandlung des Falles $n = 4$ ist ihrem Wesen nach schon ein Schluß von n auf $n + 1$, der sich nun immer weiter wiederholen läßt. Mit diesem Hinweis ist also unser Satz 4 nunmehr vollständig bewiesen.

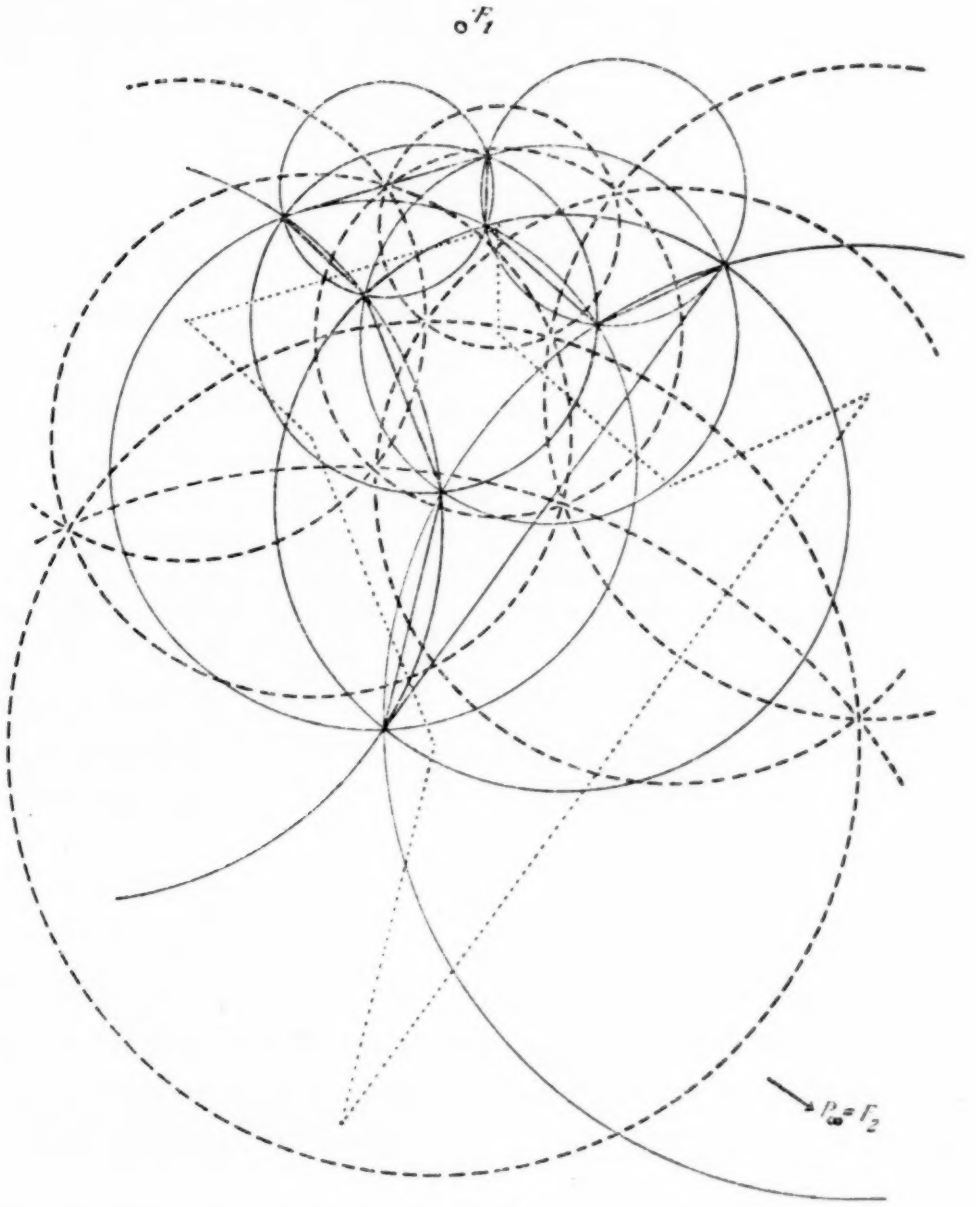


Fig. 15.
Doppeltspiegelung im Falle $n = 4$.
(F_2 unendlichferner Punkt; K_0 ist voll, K_1 gestrichelt (— — —) und K_2 punktiert (· · ·) gezeichnet; man beachte die Ähnlichkeit und parallele Lage von K_0 und K_2.)

§ 5. Spiegelungsketten.

Zum Abschluß unserer Betrachtungen über die Doppeltspiegelung wollen wir noch auf einen etwas weiter gehenden Sachverhalt hinweisen. Wir betrachten noch einmal die Figur 12 a zu $n = 3$. Wir gingen aus von der Grundkonfiguration K_0 mit den Kreisen und Punkten A, B, C, D und a, b, c, d. An K_0 spiegelten wir F_2 und erhielten die erste gespiegelte Konfiguration K_1 mit A', B' usw. und F_1 war dann Spiegelpunkt der Punkte von K_0 an den Kreisen von K_1.

Spiegeln wir nun wieder F_2 an K_1, so erhalten wir eine neue Konfiguration K_2 mit den Punkten a'', b'', c'', d'' und den entsprechenden Kreisen. Wir wollen nun zeigen,

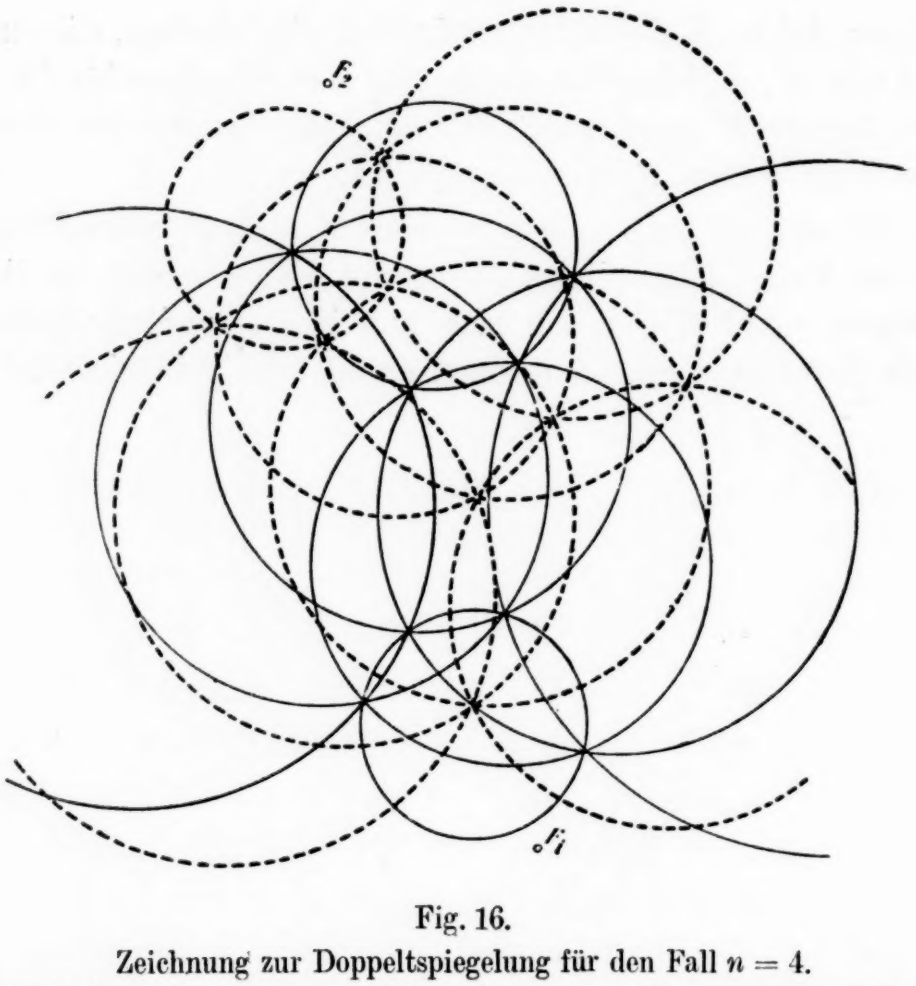


Fig. 16.

Zeichnung zur Doppeltspiegelung für den Fall $n = 4$.

(Alle Punkte liegen im Endlichen. F_1 an den gestrichelten Kreisen von K_1 gespiegelt ergibt die Punkte der voll ausgezogenen Konfiguration und F_2 an den schwarzen Kreisen gespiegelt die Punkte der gestrichelten Konfiguration.)

daß jetzt wieder F_1 der Spiegelpunkt der Punkte von K_1 an den Kreisen von K_2 ist — oder anders, daß K_1 und K_2 bezüglich derselben Punkte doppeltgespiegelt sind.

Wir erinnern an unsere Bemerkung zu Fig. 11, daß a_1a_2 parallel zu $M(B_1)$, $M(B_2)$ ist; daraus folgt hier:

$$ab \parallel a''b'',\ bc \parallel b''c'',\ ca \parallel c''a'';$$

dann liegt auch der Mittelpunkt a''' des Kreises D'' durch a'', b'', c'' auf der Geraden F_1d'. Entsprechendes gilt von den übrigen Kreisen von K_2 und damit ist die Behauptung bewiesen. Ganz analog kann man nun weiter schließen und man zeigt so, daß in dieser so entstehenden Kette von gespiegelten Konfigurationen zwei aufeinander folgende Konfigurationen K_n und K_{n+1} stets doppeltgespiegelt bzgl. F_1 und F_2 sind. Und zwar gilt:

$$F_1 \text{ gespiegelt an } K_n \text{ ergibt } K_{n-1},$$
$$F_2 \text{ gespiegelt an } K_n \text{ ergibt } K_{n+1}.$$

Es bleibt noch zu erwähnen, daß man diese Kette natürlich auch nach „rückwärts" fortsetzen kann; eine Spiegelung von F_1 an K_0 ergibt dann K_{-1} usw. Auch soll noch bemerkt werden, daß im Spezialfall, daß F_2 unendlichferner Punkt ist, K_n und K_{n+2} durch Zentralprojektion von F_1 aus verbunden sind (s. Fig. 12a und 15).

Wir behandeln nun noch die Frage nach der Existenz einer doppelt-gespiegelten Konfiguration zu einer beliebig gegebenen. Wir erinnern an die Deutung von F_1 und F_2 als die Brennpunkte von Kegelschnitten (Bemerkung zu Fig. 9). Da nun ein Kegelschnitt durch fünf Tangenten allgemein eindeutig bestimmt ist, gibt es bis zum Fall $n = 5$, d. h. zu jeder (16, 5)-Konfiguration eine doppelt-gespiegelte. Da bei der Einfach-Spiegelung dem Kegelschnitt ein Kreis entspricht, gilt der entsprechende Sachverhalt dort nur bis zum Fall $n = 3$.

Eingegangen 15. Mai 1939.

Arithmetische Theorie der Korrespondenzen algebraischer Funktionenkörper. II.

Von *Max Deuring* in Jena.

In diesem zweiten Teil [1]) wird die Struktur des Multiplikatorenrings $\boldsymbol{R}$ eines algebraischen Funktionenkörpers K mit einem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k näher untersucht. In § 1 leiten wir einige Hilfssätze her. In § 2 zeigen wir, daß wie im klassischen Fall (Teil I, § 6), die Differentiale erster Gattung von K/k eine Darstellung von $\boldsymbol{R}$ in k vermitteln, deren Grad gleich dem Geschlecht g von K ist. Diese Tatsache können wir als die Verallgemeinerung des Abelschen Theorems ansehen. Die Umkehrung des Abelschen Theorems, die sich im klassischen Fall dadurch ausdrückt, daß die von den ganzen Differentialen erzeugte Darstellung von $\boldsymbol{R}$ treu ist, kann im Fall einer Primzahlcharakteristik p nicht richtig sein; das zeigt schon der Fall des Geschlechtes 1, wo $\boldsymbol{R}$ ein Ring der Charakteristik 0 ist, während die Darstellung ja die Charakteristik $p \neq 0$ hat. In § 3 zeigen wir, daß der im klassischen Fall von Rosati [2]) angegebene involutorische Antiautomorphismus von $\boldsymbol{R}$ sich auch im allgemeinen Fall wiederfindet und in einfacher Weise aus der Erzeugung der Multiplikatoren mittels der Divisoren des Doppelkörpers $K\mathsf{K}$ abgeleitet werden kann. In § 4 wenden wir die gewonnenen Ergebnisse an, um die Struktur von $\boldsymbol{R}$ im Falle $g = 1$ einfacher herzuleiten als dies durch Herrn Hasse [3]) geschehen ist.

§ 1. Hilfssätze.

k sei ein Körper der Charakteristik p ($= 0$ oder $\neq 0$), K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten mit dem Konstantenkörper k. Das Geschlecht von K sei g. Ein Primdivisor von K/k heißt *separabel*, wenn sein Restklassenkörper über k separabel ist. Ein beliebiger Divisor von K/k heißt *separabel*, wenn er nur separable Primfaktoren hat.

1. Hilfssatz 1. *Wenn k unendlich viele Elemente hat, so enthält jede primitive Divisorenklasse C positiver Dimension von K ganze Divisoren die zu einem vorgegebenen ganzen Divisor $\mathfrak{m}$ teilerfremd sind.*

Ist Grad C nicht durch p teilbar, so gibt es in C ganze zu $\mathfrak{m}$ teilerfremde Divisoren, die außerdem separabel und quadratfrei sind.

Beweis. $\mathfrak{c}$ sei irgendein Divisor aus C und $z_1, \ldots, z_d$ sei eine Basis für die Vielfachen von $1/\mathfrak{c}$ in K. Der ganze Divisor $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}(\varepsilon_1 z_1 + \cdots + \varepsilon_d z_d)$ aus der Klasse C ist genau dann durch einen Primfaktor $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{m}$ teilbar, wenn eine gewisse lineare Gleichung

[1]) Der erste Teil erschien in diesem Journal **177** (1937), 161—191.

[2]) C. Rosati, Sulle matrici di Riemann, Rend. Circ. Mat. di Palermo **53** (1929), 79—134.

[3]) H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I, II, III, dieses Journal **175** (1936).

$\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_d\varepsilon_d = 0$ mit über k algebraischen Koeffizienten λ_ν (aus dem Restklassenkörper mod. $\mathfrak{p}$) erfüllt ist. Weil unendlich viele Konstanten verfügbar sind, können die ε_ν so gewählt werden, daß keine dieser Gleichungen gilt. $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}\sum_{\nu=1}^{d}\varepsilon_\nu z_\nu$ ist dann zu $\mathfrak{m}$ teilerfremd.

Wenn Grad C nicht durch p teilbar ist, so nehmen wir irgendeinen ganzen Divisor $\mathfrak{a}$ aus C und, was nach dem schon Bewiesenen möglich ist, einen zu $\mathfrak{a}$ teilerfremden ganzen Divisor $\mathfrak{b}$ aus C. Für das durch $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} \cong x$ gegebene Element x aus k ist dann $[K : k(x)] =$ Grad C nicht durch p teilbar, und daher ist $K/k(x)$ separabel. $\mathfrak{d}$ sei die Differente von $K/k(x)$. Wählen wir ε aus k so, daß der Zähler $\mathfrak{z} = \mathfrak{a}(x - \varepsilon)$ von $x - \varepsilon$ zu $\mathfrak{d}\mathfrak{m}$ teilerfremd ist, so hat $\mathfrak{z}$ die verlangten Eigenschaften. Denn $\mathfrak{z}$ gehört zu C, ist zu $\mathfrak{m}$ teilerfremd, und ein Primdivisor dessen Quadrat in $\mathfrak{z}$ aufginge, wäre ein Teiler von $\mathfrak{d}$, und das gleiche gälte für einen inseparabeln Primfaktor von $\mathfrak{z}$ [4]).

Für endliches k gilt Hilfssatz 1 offenbar nicht. In diesem Fall können wir aber die Anzahl der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden ganzen Divisoren einer Klasse C ausrechnen. Da die Anzahl der von 0 verschiedenen ganzen Divisoren einer Klasse A gleich $(q^{\dim A} - 1)/(q-1)$ ist, so gibt es in C genau

$$\sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{t})\,\frac{q^{\dim C\mathfrak{t}^{-1}} - 1}{q-1} = \frac{1}{q-1}\sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{t})\, q^{\dim C\mathfrak{t}^{-1}}$$

zu $\mathfrak{m}$ teilerfremde ganze Divisoren (μ ist die Möbiussche Funktion). Wenn Grad $C > 2g - 2 +$ Grad $\mathfrak{m}$ ist, so ist für jeden Teiler $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{m}$ einfach $\dim C\mathfrak{t}^{-1} = \dim C -$ Grad $\mathfrak{t}$; daher wird dann die fragliche Anzahl gleich

$$\frac{q^{\dim C}}{q-1}\sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{t})\, q^{-\text{Grad }\mathfrak{t}} = \frac{q^{\dim C}}{q-1}\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} (1 - q^{-\text{Grad }\mathfrak{p}}) > 0\,.$$

2. Wir setzen jetzt voraus, daß k vollkommen ist, und betrachten die Differentiale von K/k. K_0 sei in K enthaltener Funktionenkörper mit dem gleichen Konstantenkörper k. Sind x und y zwei Elemente aus K_0 so gibt es ein Differential $y\,dx$ von K_0 und ein Differential $y\,dx$ von K. Sie sind wohl zu unterscheiden. Denn sie haben im allgemeinen verschiedene Divisoren; ist K/K_0 inseparabel und ist x ein separierendes Element von K_0, so ist sogar $dx \neq 0$ in K_0 aber $dx = 0$ in K.

Hilfssatz 2. *Sind x und y Elemente aus K_0, und ist das Differential $y\,dx$ von K_0 ganz, so ist auch das Differential $y\,dx$ von K ganz.*

Beweis. Ist K/K_0 inseparabel, so ist $y\,dx = 0$ in K. Ist K/K_0 separabel, so ist der Divisor des K-Differentials $y\,dx$ das Produkt des Divisors des K_0-Differentials $y\,dx$ mit der (ganzen) Differente von K/K_0.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein. Ist z. B. k ein Körper der Charakteristik 2, so rechnet man leicht nach, daß dx in dem durch $y^2 - y = x^3$ definierten Körper $K = k(x, y)$ ganz, aber in $K_0 = k(x)$ natürlich gebrochen ist. Die Umkehrung von Hilfssatz 2 gilt sicher dann, wenn es einen Primdivisor von K gibt, der in der Differente von K/K_0 weniger oft aufgeht als in dem zugehörigen Primdivisor von K_0; das ist sicher dann der Fall, wenn $[K: K_0]$ kein Vielfaches von p ist, oder wenn K/K_0 unverzweigt ist (immer also im Falle $p = 0$).

Es sei jetzt K/K_0 separabel. Dann verstehen wir unter der *Spur*

$$S_{K/K_0}(y\,dx)$$

eines Differentials ydx von K in bezug auf K_0 das Differential

$$S_{K/K_0}\left(y\,\frac{dx}{dx_0}\right) dx_0$$

von K_0, wo x_0 irgendein separierendes Element von K_0 bedeutet. Daß diese Festsetzung nicht von dem verwendeten x_0 abhängt, ist ohne weiteres klar.

---

[4]) Hier wenden wir die allgemeinste Form des Dedekindschen Differenten-Diskriminantensatzes an, nach dem in der Differente genau die verzweigten und die inseparablen Primdivisoren aufgehen. Siehe E. Noether, Der Diskriminantensatz für die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers, dieses Journal **157** (1927), 82—104; auch M. Deuring, Algebren, Ergebnisse der Math. IV 1, 84.

Hilfssatz 3. *$\mathfrak{p}_0$ sei ein Primdivisor von K_0. Ist $y\,dx$ für jeden in $\mathfrak{p}_0$ aufgehenden Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K ganz, so ist $S_{K/K_0}(y\,dx)$ für $\mathfrak{p}_0$ ganz. Insbesondere ist $S_{K/K_0}(y\,dx)$ ganz, wenn $y\,dx$ ganz ist.*

Beweis. Zunächst schließen wir k algebraisch ab zu k^* und gehen zu $K^* = Kk^*$, $K_0^* = K_0k^*$ über. Da k vollkommen ist, so ändern sich bei dieser Erweiterung die Divisoren von $y\,dx$ und $S_{K/K_0}(y\,dx) = S_{K^*/K_0^*}(y\,dx)$ nicht; wir können mithin von vornherein k als algebraisch-abgeschlossen voraussetzen. Die in $S_{K/K_0}(y\,dx)$ enthaltene Potenz von $\mathfrak{p}_0$ sei $\mathfrak{p}_0^n$. P_0 sei ein Primelement zu $\mathfrak{p}_0$ in K_0. Dann ist das Residuum

$$\varrho_{\mathfrak{p}_0}(P_0^{-n-1} S_{K/K_0}(y\,dx)) \neq 0.$$

Da aber [5])

$$\varrho_{\mathfrak{p}_0}(P_0^{-n-1} S_{K/K_0}(y\,dx)) = \varrho_{\mathfrak{p}_0}(S_{K/K_0}(P_0^{-n-1} y\,dx)) = \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}_0} \varrho_{\mathfrak{p}}(P_0^{-n-1} y\,dx)$$

gilt und $y\,dx$ für die $\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{p}_0$ ganz ist, so folgt $-n-1<0$ oder also $n \geqq 0$ wie behauptet.

§ 2. Das Abelsche Theorem.

Wir schließen an Teil I an und verwenden auch die dort gebrauchten Bezeichnungen. Insbesondere sei der Konstantenkörper k fortan algebraisch-abgeschlossen.

1. K und K seien die in I §2 und, im funktionentheoretischen Fall, in §6 betrachteten Körper. g sei das Geschlecht von K, γ das von K.

Differenzieren wir die Gleichung (1) in I §6, so ergibt sich

$$\sum_\nu r_\nu \delta \boldsymbol{u}(\mathfrak{P}_\nu) = \mathsf{M}\, du(\mathfrak{p}).$$

Diese algebraische Kennzeichnung der Matrizen M übertragen wir auf den allgemeinen Fall. Zunächst wird jedem separablen Primdivisor $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}/K = K\mathsf{K}/K$ eine konstante Matrix $\mathsf{M}(\mathfrak{P})$ von γ Zeilen und g Spalten zugeordnet: Ist $\mathfrak{P}$ konstant, so soll $\mathsf{M}(\mathfrak{P}) = 0$ sein. Ist $\mathfrak{P}$ nicht-konstant, so wird $\mathsf{M}(\mathfrak{P})$ durch

$$S_{K\mathsf{K}^\pi/K}(\delta \boldsymbol{u}^\pi) = \mathsf{M}(\mathfrak{P})\, du$$

erklärt. Dabei ist $\delta\boldsymbol{u}$ eine fest gewählte Basis der ganzen Differentiale von K und du eine fest gewählte Basis der ganzen Differentiale von K. $a \to a^\pi$ ist wie in I die Restabbildung mod. $\mathfrak{P}$ von $K\mathsf{K}$ auf $K\mathsf{K}^\pi$. $\delta\boldsymbol{u}^\pi$ ist bei der Spurbildung als System von Differentialen in $K\mathsf{K}^\pi$ anzusehen (zunächst ist es ein System ganzer Differentiale von K^π). Nach den Hilfssätzen 2 und 3 ist $S_{K\mathsf{K}^\pi/K}(\delta\boldsymbol{u}^\pi)$ ein System ganzer Differentiale von K, so daß es eine Matrix $\mathsf{M}(\mathfrak{P})$ wirklich gibt. Für einen separablen Divisor $\mathfrak{D} = \prod_i \mathfrak{P}^{e_i}$ setzen wir

$$\mathsf{M}(\mathfrak{D}) = \sum_i e_i \mathsf{M}(\mathfrak{P}_i).$$

Werden statt du und $\delta\boldsymbol{u}$ andere Differentialbasen $\mathsf{A}du$ und $\mathsf{B}\delta\boldsymbol{u}$ genommen, so ist $\mathsf{M}(\mathfrak{D})$ durch $\mathsf{B}\mathsf{M}(\mathfrak{D})\mathsf{A}^{-1}$ zu ersetzen.

$\mathfrak{D} \to \mathsf{M}(\mathfrak{D})$ ist eine homomorphe Abbildung des von den separablen $\mathfrak{P}$ erzeugten Teils des Korrespondenzenmoduls von K in K auf einen Matrizenmodul über k. Darüber hinaus gilt aber — und das ist die algebraische Fassung des Abelschen Theorems:

Satz 1. *Wenn $\mathfrak{D}$ einem konstanten Divisor äquivalent ist, so ist $\mathsf{M}(\mathfrak{D}) = 0$.*

Da es nach Hilfssatz 1 zu jedem Divisor von $K\mathsf{K}/K$ einen im gröberen Sinne (d. h. bis auf konstante Faktoren) äquivalenten separablen Divisor gibt, so ist hiernach jedem Multiplikator α von K in K eindeutig eine Matrix M_α zugeordnet, und es gilt

$$\mathsf{M}_{\alpha+\beta} = \mathsf{M}_\alpha + \mathsf{M}_\beta.$$

---

[5]) H. Hasse, Theorie der Differentiale in algebraischen Funktionenkörpern mit vollkommenem Konstantenkörper, dieses Journal **172** (1935), 55—63, insbesondere §6.

Ferner liegt es jetzt nahe, $\mathsf{M}(\mathfrak{D})$ für einen beliebigen Divisor $\mathfrak{D}$ von $K\mathsf{K}/K$ dadurch zu erklären, daß wir

$$\mathsf{M}(\mathfrak{D}) = \mathsf{M}(\mathfrak{D}')$$

setzen, unter $\mathfrak{D}'$ irgendeinen zu $\mathfrak{D}$ im gröberen Sinne äquivalenten separablen Divisor verstanden.

Beweis. Da für konstantes $\mathfrak{D}$ die Behauptung $\mathsf{M}(\mathfrak{D}) = 0$ aus der Definition von $\mathsf{M}(\mathfrak{D})$ folgt, so können wir $\mathfrak{D} \sim 1$ voraussetzen.

Zuerst zeigen wir, daß wir uns auf den Fall beschränken können, daß $\mathfrak{D}$ einen konstanten Nenner hat. Es sei $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ mit ganzen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Wir wählen einen konstanten ganzen Divisor $\mathfrak{F}_0$ von solchem Grade, daß wir nach Hilfssatz 1 auf einen zu $\mathfrak{F}_0/\mathfrak{A}$ äquivalenten ganzen separablen Divisor $\mathfrak{C}$ schließen können. Aus $\mathsf{M}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}/\mathfrak{F}_0) = 0$ und $\mathsf{M}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}/\mathfrak{F}_0) = 0$ folgt dann $\mathsf{M}(\mathfrak{D}) = 0$.

Wir können weiter annehmen, daß der Zähler $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}/\mathfrak{F}_0$ quadratfrei ist. Es sei nämlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$. Wir wählen dann einen konstanten ganzen Divisor $\mathfrak{F}_1$ so, daß es einen quadratfreien separablen durch $\mathfrak{P}_1$ nicht teilbaren Divisor $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{F}_1\mathfrak{P}_1^{-1}$ gibt. Wir wählen weiter einen konstanten ganzen Divisor $\mathfrak{F}_2$ so, daß es einen quadratfreien separablen zu $\mathfrak{P}_2\mathfrak{D}_1$ teilerfremden ganzen Divisor $\mathfrak{D}_2 \sim \mathfrak{F}_2\mathfrak{P}_2^{-1}$ gibt. So fahren wir fort, bis zu einem konstanten ganzen Divisor $\mathfrak{F}_r$ und einem quadratfreien separablen zu $\mathfrak{P}_r\mathfrak{D}_1 \cdots \mathfrak{D}_{r-1}$ teilerfremden ganzen Divisor $\mathfrak{D}_r \sim \mathfrak{F}_r\mathfrak{P}_r^{-1}$. Außerdem seien die Grade der $\mathfrak{F}_\nu$ so groß gewählt, daß es einen konstanten ganzen Divisor $\mathfrak{F}' \sim \mathfrak{F}_0^{-1}\mathfrak{F}_1 \cdots \mathfrak{F}_r$ gibt. $\mathfrak{D}_1 \cdots \mathfrak{D}_r, \mathfrak{P}_1\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{P}_r\mathfrak{D}_r$ sind dann quadratfreie separable ganze Divisoren, und jeder von ihnen ist einem konstanten ganzen Divisor äquivalent:

$$\mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_r \sim \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{F}_\nu / \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{P}_\nu = \mathfrak{A}^{-1} \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{F}_\nu \sim \mathfrak{F}_0^{-1} \prod_{\nu=1}^{r} \mathfrak{F}_\nu \sim \mathfrak{F}', \quad \mathfrak{P}_\nu\mathfrak{D}_\nu \sim \mathfrak{F}_\nu.$$

Aus $\mathsf{M}(\mathfrak{D}_1 \cdots \mathfrak{D}_r) = 0$ und $\mathsf{M}(\mathfrak{P}_\nu\mathfrak{D}_\nu) = 0$ folgt aber $\mathsf{M}(\mathfrak{D}) = \mathsf{M}(\mathfrak{A}) = 0$.

Es sei also jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$ ein Produkt von lauter verschiedenen separablen Primdivisoren $\mathfrak{P}_\nu$, das einem konstanten ganzen Divior $\mathfrak{F}$ äquivalent ist. Wir müssen $\mathsf{M}(\mathfrak{A}) = 0$ beweisen. Es sei $A \sim \mathfrak{A}/\mathfrak{F}$. Den größten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}$ können wir weglassen, da er zu $\mathsf{M}(\mathfrak{A})$ den Beitrag 0 liefert. $\mathfrak{A}$ sei also der genaue Zähler und $\mathfrak{F}$ der genaue Nenner von A. d sei die Dimension der Klasse von $\mathfrak{F}$ in K, und $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ eine Basis der Multipla von $1/\mathfrak{F}$ in K. $\zeta_1, \ldots, \zeta_d$ ist auch eine Basis der Multipla von $1/\mathfrak{F}$ in $K\mathsf{K}$, wie man leicht zeigen kann [6]). Es gilt also

$$A = \sum_{\nu=1}^{d} c_\nu \zeta_\nu \tag{1}$$

mit Elementen c_ν aus K.

x sei ein separierendes Element von K/k und ξ ein separierendes Element von K/k, für das die Differente $\mathfrak{d}_\xi$ von $\mathsf{K}/k(\xi)$ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd ist (Hilfssatz 1). Wir können annehmen daß auch der Nenner $\mathfrak{n}_\xi$ von ξ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd ist, indem wir nötigenfalls, unter ε eine passende Konstante verstanden, ξ durch $\frac{1}{\xi - \varepsilon}$ ersetzen. $K\mathsf{K}$ ist über $K(A)$ separabel, weil die separablen Primdivisoren $\mathfrak{P}_\nu$ in $\mathfrak{A}$ in erster Potenz aufgehen.

---

[6]) Für vollkommenen Konstantenkörper k sind außer den Divisorengraden auch die Dimensionen der Divisorenklassen von K/k bei jeder Konstantenerweiterung, insbesondere bei algebraischem Abschluß invariant; daraus folgt auch die Invarianz des Geschlechtes und nach E. Witt die Invarianz der Divisorenäquivalenz, da die Hauptklasse H durch Grad $H = 0$, dim $H = 1$ gekennzeichnet ist. Der Beweis ergibt sich leicht daraus, daß erstens für algebraisch-abgeschlossenes k die Primdivisoren von K/k sich bei Konstantenerweiterung nicht weiter aufspalten, und daß zweitens der Lösungsrang eines linearen Gleichungssystems bei beliebiger Konstantenerweiterung invariant ist. Ist k nicht vollkommen, so liegen die Verhältnisse verwickelter.

Hilfssatz 4. *Ist $\eta\,\delta\xi$ ein ganzes Differential von* K, *so ist*

$$S_{K\mathsf{K}/K(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\frac{\delta\xi}{\delta A}\right)=0. \tag{2}$$

Dabei wird mit d die Differentiation von $K\mathsf{K}$ bei konstantem K und mit δ die bei konstantem K bezeichnet.

Beweis. Wir zeigen daß $S_{K\mathsf{K}/K(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi\right)$ ein ganzes Differential von $K(A)$ ist; da $K(A)$ das Geschlecht 0 hat, so ist dann $S_{K\mathsf{K}/K(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\delta\xi\right)=0$, das heißt $S_{K\mathsf{K}/K(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\frac{\delta\xi}{\delta A}\right)=0$. Wir wollen diesen Nachweis auf Hilfssatz 3 gründen. Da dieser aber nur für vollkommene Konstantenkörper formuliert und bewiesen worden ist, so schließen wir den (nur im Falle $p=0$ vollkommenen) Körper K algebraisch ab zu K^* und beweisen, was auf das gleiche hinausläuft, daß $S_{K^*\mathsf{K}/K^*(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi\right)$ ganz ist.

Aus (1) folgt

$$\frac{dA}{dx}=\sum_{\nu=1}^{d}\frac{dc_\nu}{dx}\,\zeta_\nu; \tag{3}$$

der Nenner von $\frac{dA}{dx}$ geht daher in $\mathfrak{F}$ auf, wenn nicht überhaupt $\frac{dA}{dx}=0$ ist. $\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi$ ist mithin höchstens für die Primteiler von $\mathfrak{F}$ gebrochen, und daraus folgt nach Hilfssatz 3, daß $S_{K^*\mathsf{K}/K^*(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi\right)$ höchstens für den Primdivisor $\mathfrak{F}$ von $K^*(A)/K^*$ gebrochen ist. Ferner ist $A^{-1}\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi$ für die Primteiler von $\mathfrak{F}$ ganz, nach Hilfssatz 3 ist mithin $A^{-1}S_{K^*\mathsf{K}/K^*(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi\right)$ für $\mathfrak{F}$ ganz. $S_{K^*\mathsf{K}/K^*(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi\right)$ hat also höchstens einen Pol erster Ordnung. Nach dem Residuensatz ist mithin $S_{K^*\mathsf{K}/K^*(A)}\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\delta\xi\right)$ ganz.

Die damit bewiesene Gleichung (2) werden wir mod. $\mathfrak{A}$ reduzieren und dadurch die Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{P}_\nu\mid\mathfrak{A}}{}'\,S_{K\mathsf{K}^{\pi_\nu}/K}((\eta\delta\xi)^{\pi_\nu})=0$$

gewinnen, wo der Strich am Summenzeichen bedeute, daß nur über die nicht-konstanten Primfaktoren $\mathfrak{P}_\nu$ von $\mathfrak{A}$ zu summieren ist. Das ist aber die zu beweisende Behauptung, für ein einzelnes ganzes Differential $\eta\,\delta\xi$ von K geschrieben.

Der Ring $(K\mathsf{K})^\alpha$ der Reste Z^α mod. $\mathfrak{A}$ der $\mathfrak{A}$-ganzen Elemente Z von $K\mathsf{K}$ ist die direkte Summe der Restklassenkörper $K\mathsf{K}^{\pi_\nu}$. Daher ist für ein $\mathfrak{A}$-ganzes Z

$$S_{(K\mathsf{K})^\alpha/K}(Z^\alpha)=\sum_{\mathfrak{P}_\nu\mid\mathfrak{A}}S_{K\mathsf{K}^{\pi_\nu}/K}(Z^{\pi_\nu}).$$

Andererseits ist

$$S_{(K\mathsf{K})^\alpha/K}(Z^\alpha)=(S_{K\mathsf{K}/K(A)}(Z))^\alpha.$$

Zum Beweis nehmen wir eine Basis $C_1,\ldots,C_n$ des Rings der $\mathfrak{A}$-ganzen Elemente von $K\mathsf{K}$ in bezug auf den Ring der rationalen Funktionen von A über K mit nicht durch A teilbaren Nennern. Ist dann

$$ZC_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}C_\mu f_{\mu\nu}(A)\qquad(\nu=1,\ldots,n),$$

so ist

$$S_{K\mathsf{K}/K(A)}(Z) = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\nu}(A)$$

und daher

$$(S_{K\mathsf{K}/K(A)}(Z))^{\varkappa} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\nu\nu}(0).$$

$C_1^{\varkappa}, \ldots, C_n^{\varkappa}$ ist bekanntlich eine Basis von $(K\mathsf{K})^{\varkappa}/K$; es ist

$$Z^{\varkappa} C_{\nu}^{\varkappa} = \sum_{\mu=1}^{n} C_{\mu}^{\varkappa} f_{\mu\nu}(0) \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

und daher auch

$$S_{(K\mathsf{K})^{\varkappa}/K}(Z^{\varkappa}) = \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu\nu}(0).$$

Aus (2) folgt daher, wenn $\frac{dA}{dx}\eta\frac{\delta\xi}{\delta A}$ als $\mathfrak{A}$-ganz nachgewiesen ist, durch Übergang zu den Resten mod. $\mathfrak{A}$ die Gleichung:

$$\sum_{\mathfrak{P}_\nu} S_{K\mathsf{K}^{\pi_\nu}/K}\left(\left(\frac{dA}{dx}\eta\frac{\delta\xi}{\delta A}\right)^{\pi_\nu}\right) = 0. \tag{4}$$

Die drei Faktoren η, $\frac{dA}{dx}$ und $\frac{\delta\xi}{\delta A}$ sind aber einzeln $\mathfrak{A}$-ganz: η, weil der Nenner von η im Zähler von $\delta\xi$, also in der voraussetzungsgemäß zu $\mathfrak{A}$ teilerfremden Differente $\mathfrak{d}_\xi$ von $\mathsf{K}/k(\xi)$ aufgeht; $\frac{dA}{dx}$, weil der Nenner von $\frac{dA}{dx}$ nach (3) in $\mathfrak{F}$ aufgeht; und $\frac{\delta\xi}{\delta A} \cong \mathfrak{F}^2\mathfrak{d}_\xi/\mathfrak{n}_\xi^2\mathfrak{d}_A$, weil die Differente $\mathfrak{d}_A$ von $K\mathsf{K}/K(A)$ und der Nenner $\mathfrak{n}_\xi$ von ξ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd sind.

Aus (1) folgt nun

$$\frac{\delta A}{\delta\xi} = \sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \frac{\delta\zeta_\mu}{\delta\xi}, \quad \text{also} \quad \left(\frac{\delta A}{\delta\xi}\right)^{\pi_\nu} = \sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \left(\frac{\delta\zeta_\mu}{\delta\xi}\right)^{\pi_\nu},$$

denn die Reste $\left(\frac{\delta\zeta_\mu}{\delta\xi}\right)^{\pi_\nu}$ sind endlich, weil der Nenner von $\frac{\delta\zeta_\mu}{\delta\xi}$ als Teiler von $\mathfrak{F}^2\mathfrak{d}_\xi$ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd ist. Wir haben also

$$\left(\frac{\delta\xi}{\delta A}\right)^{\pi_\nu} = \left(\sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \left(\frac{\delta\zeta_\mu}{\delta\xi}\right)^{\pi_\nu}\right)^{-1}.$$

Weiter folgt aus (3)

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)^{\pi_\nu} = \sum_{\mu=1}^{d} \frac{dc_\mu}{dx}\zeta_\mu^{\pi_\nu}$$

und aus (1)

$$\sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \zeta_\mu^{\pi_\nu} = 0,$$

$$\sum_{\mu=1}^{d} \frac{dc_\mu}{dx}\zeta_\mu^{\pi_\nu} + \sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \frac{d\zeta_\mu^{\pi_\nu}}{dx} = 0,$$

also

$$\left(\frac{dA}{dx}\right)^{\pi_\nu} = -\sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \frac{d\zeta_\mu^{\pi_\nu}}{dx}.$$

Damit ergibt sich zusammengenommen:

$$\left(\frac{dA}{dx}\,\eta\,\frac{\delta\xi}{\delta A}\right)^{\pi_\nu} = -\,\eta^{\pi_\nu}\,\frac{\sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \frac{d\zeta_\mu^{\pi_\nu}}{dx}}{\sum_{\mu=1}^{d} c_\mu \left(\frac{\delta\zeta_\mu}{\delta\xi}\right)^{\pi_\nu}}.$$

Ist nun $\mathfrak{P}_\nu$ konstant, so ist $\zeta_\mu^{\pi_\nu}$ ein Element aus k und daher

$$\frac{d\zeta_\mu^{\pi_\nu}}{dx} = 0,\quad \left(\eta\,\frac{dA}{dx}\,\frac{\delta\xi}{\delta A}\right)^{\pi_\nu} = 0.$$

Ist aber $\mathfrak{P}_\nu$ nicht konstant, so wird K durch π_ν isomorph abgebildet, und daher ist $\left(\frac{\delta\zeta_\mu}{\delta\xi}\right)^{\pi_\nu} = \frac{d\zeta_\mu^{\pi_\nu}}{d\xi^{\pi_\nu}}$, also $\left(\eta\,\frac{dA}{dx}\,\frac{\delta\xi}{\delta A}\right)^{\pi_\nu} = -\,\eta^{\pi_\nu}\frac{d\xi^{\pi_\nu}}{dx}$. Nach (4) ist daher

$$\sum_{\mathfrak{P}_\nu}{}' S_{K\mathsf{K}^{\pi_\nu}/K}\left(\eta^{\pi_\nu}\frac{d\xi^{\pi_\nu}}{dx}\right) = 0,$$

oder also

$$\sum_{\mathfrak{P}_\nu} S_{K\mathsf{K}^{\pi_\nu}/K}((\eta\delta\xi)^{\pi_\nu}) = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Es sei noch folgendes bemerkt:

Wenn $\mathfrak{P}$ ein Primdivisor ist, für den $K\mathsf{K}^\pi/\mathsf{K}^\pi$ inseparabel ist, so ist $\mathsf{M}(\mathfrak{P}) = 0$.

Denn in diesem Falle ist $K\mathsf{K}^\pi/K$ separabel, $\mathfrak{P}$ ist also ein separabler Primdivisor, und die Bildung von $\mathsf{M}(\mathfrak{P})$ ergibt 0, weil $\delta\boldsymbol{u}$ in $K\mathsf{K}^\pi$ gleich 0 ist.

2. Wie in I § 4 seien jetzt drei Funktionenkörper K_1, K_2, K_3 gegeben. Wir zeigen

Satz 2. *Ist α_{12} ein Multiplikator von K_1 in K_2, α_{23} ein Multiplikator von K_2 in K_3, so ist*

$$\mathsf{M}_{\alpha_{23}\alpha_{12}} = \mathsf{M}_{\alpha_{23}} \cdot \mathsf{M}_{\alpha_{12}}.$$

Dabei ist je eine feste Basis du_ν der ganzen Differentiale von K_ν zugrundegelegt.

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 10, I § 4. Unsere Behauptung läuft auf

$$\mathsf{M}(\mathfrak{D}_{23})\,\mathsf{M}(\mathfrak{D}_{12}) = \mathsf{M}(\mathfrak{D}_{13}) \tag{5}$$

hinaus. Offensichtlich genügt es den Fall zu betrachten, daß $\mathfrak{D}_{12} = \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{D}_{23} = \mathfrak{Q}$ separable Primdivisoren sind. Wenn $\mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{Q}$ konstant ist, so ist nach I § 4 auch $\mathfrak{D}_{13}$ konstant; dann sind in (5) beide Seiten 0. Wenn $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht-konstant sind, so konstruieren wir $\mathfrak{D}_{13}$ nach dem Verfahren von I § 4; wir haben es mit dem dort auf S. 183 behandelten Fall zu tun, weil nach Voraussetzung $K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}$ über K_2^π separabel ist. Die dort gefundenen Primfaktoren $\mathfrak{R}_i$ von $\mathfrak{D}_{13} = \prod_i \mathfrak{R}^{e_i}$ sind separabel, denn wegen der Separabilität von $\mathfrak{P}$ ist $K_1^{\varrho i}K_2^\pi$ über $K_1^{\varrho i}$ und wegen der Separabilität von $\mathfrak{Q}$ ist $K^{(i)}$ über $K_1^{\varrho i}K_2^\pi$ separabel, um so mehr ist $K_{1i}^{*\varrho i} = K_1^{\varrho i}K_3^{\varkappa\pi} \leqq K^{(i)}$ über $K_1^{\varrho i}$ separabel. Deswegen können wir folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}(\mathfrak{D}_{13})\,du_1 &= \sum_i e_i \mathsf{M}(\mathfrak{R}_i)\,du_1 = \sum_i e_i S_{K_{1i}^{*\varrho i}/K_1^{\varrho i}}(du_3^{\varkappa\pi}) = \sum_i S_{K^{(i)}/K_1^{\varrho i}}(du_3^{\varkappa\pi}) \\
&= S_{(K_1K_2^\pi \times K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi})/K_1}(du_3^{\varkappa\pi}) = S_{K_1K_2^\pi/K_1}[S_{(K_1K_2^\pi \times K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi})/K_1K_2^\pi}(du_3^{\varkappa\pi})] \\
&= S_{K_1K_2^\pi/K_1}[S_{K_2^\pi K_3^{\varkappa\pi}/K_2^\pi}(du_3^{\varkappa\pi})] = S_{K_1K_2^\pi/K_1}[\mathsf{M}(\mathfrak{Q})\,du_2^\varkappa] \\
&= \mathsf{M}(\mathfrak{Q})\,S_{K_1K_2^\pi/K_1}du_2^\varkappa = \mathsf{M}(\mathfrak{Q})\,\mathsf{M}(\mathfrak{P})\,du_1 \qquad \text{w. z. b. w.}
\end{aligned}$$

Wenn wir Multiplikatoren eines Körpers K in sich betrachten, so müssen wir, wie in I § 5 angegeben wurde, ein isomorphes Bild $\mathsf{K} = K^{\varphi}$ von K heranziehen. Es ist dann aber bequemer, anders als in I § 4, in dem Schema zur Bildung von $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ den Körper K_0^* nicht mit K^{π}, sondern mit K^{π} zu bezeichnen und mit $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ nicht den nach der Erklärung in I S. 172 darunter zu verstehenden Divisor von K, sondern gleich dessen durch φ^{-1} gegebenes Urbild in K. $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ berechnet sich dann einfach nach der Regel

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) = N_{K^{\pi}K/K^{\pi}}(\mathfrak{a})^{\pi^{-1}}. \tag{6}$$

(Die entsprechende Regel für *nicht* isomorphe K und K steht in I auf S. 182, Zeile 14 von oben.) π ist also jetzt ein Isomorphismus von K auf einen Teilkörper $K_0^* = K^{\pi}$ einer endlich-algebraischen Erweiterung $K^* = K_0^*K = K^{\pi}K$ von K, der aus dem in I mit π bezeichneten Isomorphismus von K auf $K_0^* = \mathsf{K}^{\pi}$ entsteht, indem der feste Isomorphismus φ von K auf $\mathsf{K} = K^{\varphi}$ vorgefügt wird.

Wir wollen im Fall, daß es sich um Multiplikatoren von K zu sich handelt, einander entsprechende Differentialbasen du und $\delta u = (du)^{\varphi}$ von K und K zugrundelegen. Die Definition von $\mathsf{M}(\mathfrak{P})$ für separables $\mathfrak{P}$ lautet dann:

$$\mathsf{M}(\mathfrak{P})du = S_{KK^{\pi}/K}((du)^{\pi}).$$

Aus Satz 2 folgt für diesen Fall:

Satz 2a. *$\alpha \to \mathsf{M}_{\alpha}$ ist eine ringhomomorphe Abbildung des Multiplikatorenrings $\boldsymbol{R}$ von K auf einen Matrizenring über k.*

Im klassischen Fall ist diese Darstellung des Multiplikatorenrings treu, wie in I § 6 ausgeführt wurde. Das ist, wie hieraus leicht folgt, allgemeiner der Fall, wenn k die Charakteristik 0 hat. Für Primzahlcharakteristik ist es nicht richtig, wie schon das Beispiel der Körper vom Geschlechte $g = 1$ zeigt. Der Multiplikatorenring hat dann die Charakteristik 0, während die Darstellung M_{α} ja die gleiche Charakteristik hat wie k.

§ 3. Der Rosatische Antiautomorphismus des Multiplikatorenrings.

1. Nach I § 5 entsprechen die Multiplikatoren von K in K umkehrbar eindeutig den gröberen Divisorenklassen von $K\mathsf{K}/K$. Wir können stattdessen auch sagen, daß die Multiplikatoren von K in K den Idealklassen des Rings aller derjenigen Elemente aus $K\mathsf{K}$ eineindeutig entsprechen, dessen Nenner konstante Divisoren von $K\mathsf{K}/K$ sind. Wir zeigen, daß dieser Ring das *Ring*kompositum $[K, \mathsf{K}]$ der Teilkörper K und K von $K\mathsf{K}$ ist, also die Gesamtheit aller Ausdrücke $\sum_{\nu} a_{\nu}\alpha_{\nu}$, $a_{\nu} \in K$, $\alpha_{\nu} \in \mathsf{K}$. Der Ring $[K, \mathsf{K}]$ umfaßt den Ring $\mathfrak{o}_{\xi}$ aller von einem nicht-konstanten Element ξ aus K ganzabhängigen Elemente, denn $\mathfrak{o}_{\xi}$ ist das Kompositum von K mit dem Ring aller von ξ ganzabhängigen Elemente aus K. Jeder $\mathfrak{o}_{\xi}$ umfassende Teilring von $K\mathsf{K}$ besteht aus allen Elementen von $K\mathsf{K}$, die für gewisse Primdivisoren von $K\mathsf{K}/K$ ganz sind. Da die Nenner der Elemente von $[K, \mathsf{K}]$ konstante Divisoren von $K\mathsf{K}/K$ sind, und da andererseits jeder konstante Primdivisor von $K\mathsf{K}/K$ als Nennerprimteiler von $[K, \mathsf{K}]$-Elementen — nämlich von K-Elementen — vorkommt, so ist $[K, \mathsf{K}]$ gerade der Ring aller Elemente von $K\mathsf{K}$, die für alle nicht-konstanten Primdivisoren von $K\mathsf{K}/K$ ganz sind, wie behauptet.

$[K, \mathsf{K}]$ ist in K und K symmetrisch. Daher ergibt die Vertauschung von K und K in der Idealklassengruppe von $[K, \mathsf{K}]$ eine isomorphe Abbildung $\mu \to \mu^*$ des Multiplikatorenmoduls von K in K auf den Multiplikatorenmodul von K in K.

2. Wir betrachten jetzt die Multiplikatoren eines Körpers K in sich.

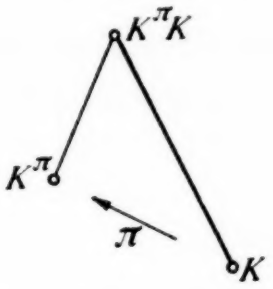
Satz 3. *Die Abbildung $\mu \to \mu^*$ des Multiplikatorenrings $\boldsymbol{R}$ von K in sich ist ein Antiautomorphismus, d. h. es gilt*

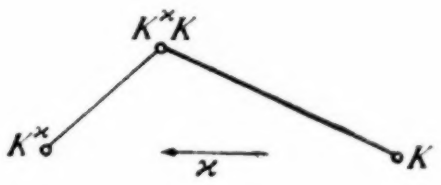
$$(\mu\nu)^* = \nu^*\mu^*.$$

Beweis. Es genügt natürlich, dies für zwei Multiplikatoren μ und ν zu zeigen, die aus zwei nicht-konstanten Primdivisoren $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ von $K\mathsf{K}/K$ (also aus zwei Primidealen von $[K, \mathsf{K}]$) entspringen. $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ und $\mathfrak{Q}(\mathfrak{a})$ bilden wir nach der Regel (6) aus § 2:

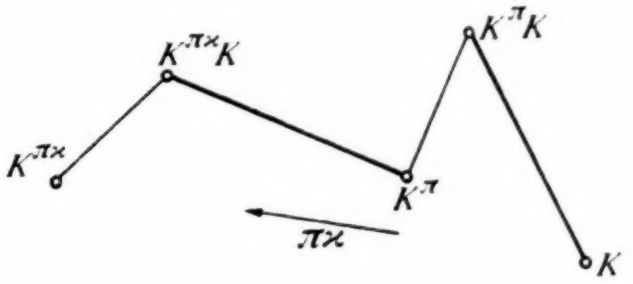
$$\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) = N_{K^\pi K/K^\pi}(\mathfrak{a})^{\pi^{-1}}, \quad \mathfrak{Q}(\mathfrak{a}) = N_{K^\varkappa K/K^\varkappa}(\mathfrak{a})^{\varkappa^{-1}}.$$

Dabei gehören zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ zwei Körperschemata





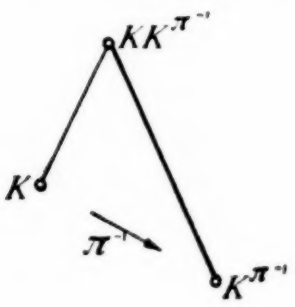
und die Produktkorrespondenz $\mathfrak{R}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a}))$ ergibt sich aus dem zusammengesetzten Schema

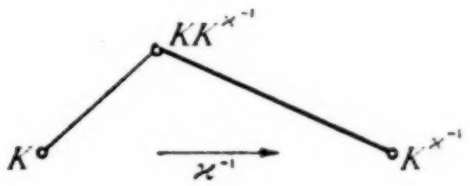


so daß

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a})) = N_{K^\varkappa K/K^\varkappa}(N_{K^\pi K/K^\pi}(\mathfrak{a})^{\pi^{-1}})^{\varkappa^{-1}} = N_{K^{\pi\varkappa}K^\pi/K^{\pi\varkappa}}(N_{K^\pi K/K^\pi}(\mathfrak{a}))^{(\pi\varkappa)^{-1}}$$

ist. Nach ihrer Erklärung entspringen μ^* und ν^* aus den Primdivisoren $\mathfrak{P}^*$ und $\mathfrak{Q}^*$ zu den beiden Schemata, die sich durch Vertauschen von K und K in den zu $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gehörigen Schemata ergeben:





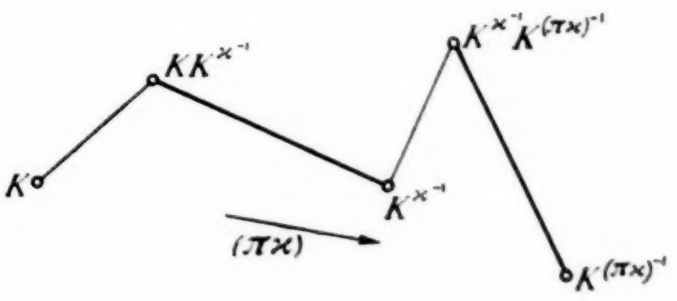
Es ist also

$$\mathfrak{P}^*(\mathfrak{a}) = N_{KK^{\pi^{-1}}/K^{\pi^{-1}}}(\mathfrak{a})^\pi, \qquad \mathfrak{Q}^*(\mathfrak{a}) = N_{KK^{\varkappa^{-1}}/K^{\varkappa^{-1}}}(\mathfrak{a})^\varkappa$$

und

$$\mathfrak{P}^*(\mathfrak{Q}^*(\mathfrak{a})) = N_{KK^{\pi^{-1}}/K^{\pi^{-1}}}(N_{KK^{\varkappa^{-1}}/K^{\varkappa^{-1}}}(\mathfrak{a})^\varkappa)^\pi = N_{K^{\varkappa^{-1}}K^{(\pi\varkappa)^{-1}}/K^{(\pi\varkappa)^{-1}}}(N_{KK^{\varkappa^{-1}}/K^{\varkappa^{-1}}}(\mathfrak{a}))^{\pi\varkappa},$$

dem zusammengesetzten Schema



entsprechend. Der Vergleich der beiden zusammengesetzten Schemata, die wir uns nach I § 4 in einzelne Teile zerlegt denken müssen, die den Primfaktoren von $\mathfrak{N}$ entsprechen, ergibt aber

$$\mathfrak{N}^*(\mathfrak{a}) = N_{K^{\varkappa-1}K(\pi\varkappa)-1/K(\pi\varkappa)-1}(N_{KK^{\varkappa-1}/K^{\varkappa}-1}(\mathfrak{a}))^{\pi\varkappa} = \mathfrak{P}^*(\mathfrak{Q}^*(\mathfrak{a})).$$

Es ist also umsomehr $\nu^*\mu^* = (\mu\nu)^*$.

§ 4. Die Struktur des Multiplikatorenrings elliptischer Funktionenkörper.

1. K habe das Geschlecht 1. Wir wollen zeigen, daß der Multiplikatorenring $\boldsymbol{R}$ von K in sich entweder

1. Der Ring der ganzen rationalen Zahlen

oder

2. Eine Ordnung eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers

oder

3. Eine Ordnung der bei ∞ und bei p verzweigten Quaternionenalgebra $Q_{\infty, p}$ ist. Der dritte Fall setzt voraus, daß die Charakteristik p von K eine Primzahl ist.

2. $\mathfrak{o}$ sei ein fester Primdivisor von K/k. Der Multiplikator μ von K in sich werde durch den Divisor $\mathfrak{D}$ von KK^{φ}/K erzeugt. Nach dem Riemann-Rochschen Satz gibt es genau einen ganzen Divisor $\mathfrak{P}_{\mu} \sim \mathfrak{D}\mathfrak{o}^{\varphi}/\mathfrak{D}(\mathfrak{o})^{\varphi}$ von KK^{φ}/K. $\mathfrak{P}_{\mu}$ ist vom Grade 1 und daher Primdivisor. Es ist $\mathfrak{P}_{\mu}(\mathfrak{o}) \sim \mathfrak{D}(\mathfrak{o})\mathfrak{o}/\mathfrak{D}(\mathfrak{o})$, also $\mathfrak{P}_{\mu}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$. Wenn umgekehrt ein Primdivisor $\mathfrak{Q}$ von KK^{φ}/K mit $\mathfrak{Q}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ den Multiplikator μ erzeugt, so ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mu}$. Denn jedenfalls ist $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{P}_{\mu}\mathfrak{c}^{\varphi}$ mit konstantem $\mathfrak{c}^{\varphi}$; daraus folgt $\mathfrak{o} = \mathfrak{Q}(\mathfrak{o}) \sim \mathfrak{P}_{\mu}(\mathfrak{o})\mathfrak{c} = \mathfrak{o}\mathfrak{c}$, also $\mathfrak{c} \sim 1$, $\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{P}_{\mu}$, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\mu}$. Das einzige μ mit konstantem $\mathfrak{P}_{\mu}$ ist $\mu = 0$ mit $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{o}_{\varphi}$. Für $\mu \neq 0$ wird $\mathfrak{P}_{\mu}$ durch einen Isomorphismus $z \to z^{\mu}$ von K/k auf einen Teilkörper K^{μ}/k festgelegt. Ein solcher Isomorphismus heißt ein *Meromorphismus* von K/k. Wegen $\mathfrak{P}_{\mu}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ ist $N_{K/K^{\mu}}(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}^{\mu}$. Meromorphismen mit dieser Eigenschaft heißen *normiert* (in bezug auf $\mathfrak{o}$). Die Multiplikatoren $\mu \neq 0$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den normierten Meromphismen; wir bezeichnen daher (wie schon eben) die Merophismen mit den gleichen Buchstaben μ wie die Multiplikatoren. Ist $\mu \neq 0$ und $\lambda \neq 0$, so erzeugt der normierte Meromorphismus $z \to (z^{\lambda})^{\mu}$ einen Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{Q}$ von KK^{φ}/K, zu dem nach der Definition des Multiplikatorenprodukts der Multiplikator $\lambda\mu$ gehört. Mithin ist $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_{\lambda\mu}$ und $(z^{\lambda})^{\mu} = z^{\lambda\mu}$. Die μ multiplizieren sich also als Meromorphismen ebenso wie als Multiplikatoren. Dabei müssen wir, nach dem in I § 4 Satz 10 festgestellten Zusammenhang zwischen der Nacheinanderausführung der Meromorphismen μ mit der Multiplikation der Multiplikatoren μ als Homomorphismen der Divisorenklassengruppe nullten Grades, die Multiplikatoren μ als *Links*operatoren der Klassen nullten Grades C schreiben: μC. Die Eins des Multiplikatorenrings $\boldsymbol{R}$ entspricht dem identischen Meromorphismus; wir wollen sie der Deutlichkeit halber mit ε bezeichnen.

3. Wir zeigen:

Der Ring $\boldsymbol{R}$ ist nullteilerfrei.

Wir schließen das daraus, daß zu jeder Klasse nullten Grades C von K und jedem Multiplikator $\mu \neq 0$ eine Klasse X mit

$$\mu X = C \tag{1}$$

angegeben werden kann. Ist nämlich auch $\lambda \neq 0$, so gibt es ein C mit $\lambda C \neq 1$, und aus (1) folgt $\lambda\mu X \neq 1$, d. h. $\lambda\mu \neq 0$. Um (1) aufzulösen, betrachten wir den Primdivisor $\mathfrak{c}$ der Klasse $C\mathfrak{o}$ und den Primdivisor $\mathfrak{x}$ der Klasse $X\mathfrak{o}$. Da $\mathfrak{P}_{\mu}(\mathfrak{x}) = (N_{K/K^{\mu}}(\mathfrak{x}))^{\mu^{-1}}$ gilt (nach § 2, (4)), so sind die gesuchten $\mathfrak{x}$ durch $N_{K/K^{\mu}}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{o}^{\mu}$ charakterisiert; sie sind also die K-Primteiler von $\mathfrak{o}^{\mu}$. Wir finden hieraus genauer:

Die Anzahl T_μ der Lösungen von $\mu X = C$ ist gleich $(K : K^\mu)/I_\mu$, wo I_μ den Inseparabilitätsgrad von K/K^μ bezeichnet.

Das gilt zunächst nur für die C, für die $\mathfrak{p}^\mu$ im größten separablen Teilkörper von K/K^μ unverzweigt ist, aber T_μ hängt ja nicht von C ab. Nebenbei ergibt sich demnach, daß K/K^μ unverzweigt ist, was natürlich auch einfach daraus folgt, daß beide Körper das Geschlecht 1 haben.

4. *Die Multiplikatoren $n\varepsilon$, also die natürlichen Vielfachen von ε, sind von 0 verschieden.*

Beweis. Der Multiplikator $n\varepsilon$ ist die Potenzierung mit n der Klassen nullten Grades. Wäre er gleich 0, so müßte die n-te Potenz jeder Klasse nullten Grades gleich 1 sein; es gälte folglich für jeden Primdivisor $\mathfrak{p}$ von K/k $\mathfrak{p}^n \sim \mathfrak{o}^n$. Wir können aber mittels einer von Hasse [3]) (Teil I) angewendeten Schlußweise zeigen, daß nur endlich viele $\mathfrak{p}$ diese Äquivalenz erfüllen: $y_0 = 1, y_1, \ldots, y_{n-1}$ sei eine Basis der Multipla von $\mathfrak{o}^{-n}$. Ist $\mathfrak{p}^n\mathfrak{o}^{-n} \sim y$, so ist y eine Linearkombination der y_ν mit Koeffizienten aus k. Ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$, also $\mathfrak{p}^n$ der Zähler von y, so muß die Differentialdeterminante $|D^{(\nu)}y_\mu|$ $(\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n-1)$ einen durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Zähler haben. Da die Determinante $|D_\mu^{(\nu)}y|$ wegen der linearen Unabhängigkeit der y_ν nicht gleich 0 ist, so kann es nur endlich viele solche $\mathfrak{p}$ geben.

Der Ring $\boldsymbol{R}$ hat die Charakteristik 0, d. h. jedes natürliche Vielfache $n\mu$ eines von 0 verschiedenen Multiplikators μ ist selbst von 0 verschieden.

Das folgt jetzt einfach aus der in **3** bewiesenen Nullteilerfreiheit von M, weil ja μ und $n\varepsilon$ zwei von Null verschiedene Multiplikatoren sind. — Wir können nunmehr ohne Mißverständnis $\varepsilon = 1$ setzen.

5. $\mu \to \mu^*$ sei der in § 3 gewonnene Antiautomorphismus von $\boldsymbol{R}$. Wir berechnen $\mu\mu^*$. Wenn $\mu = 0$ ist, so ist $\mu\mu^* = 0$. Es sei $\mu \neq 0$. Um für einen Divisor $\mathfrak{a}$ von K die Funktion $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{P}_\mu^*(\mathfrak{a}))$ zu bilden, haben wir $\mathfrak{a}$ von K nach $K^{\mu^{-1}}$ zu verlagern und dann die Norm nach K zu bilden. Es ergibt sich $\mathfrak{P}_\mu(\mathfrak{P}_\mu^*(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}^{[K:K^\mu]}$. Daher ist

$$\mu\mu^* = [K : K^\mu].$$

Das Produkt $\mu\mu^*$, das wir die *Norm von μ* nennen, und mit $N(\mu)$ bezeichnen, ist also die natürliche Zahl $[K : K^\mu]$, als natürlicher Multiplikator verstanden. Die Summe $\mu + \mu^*$ heiße die *Spur von μ* und werde mit $S(\mu)$ bezeichnet. $S(\mu) = N(\mu+1) - N(\mu) - 1$ ist eine ganze rationale Zahl. μ und μ^* sind dann die Wurzeln der ganzzahligen quadratischen Gleichung

$$t^2 - tS(\mu) + N(\mu) = 0.$$

Da keine Norm $N(\mu)$ negativ ist, so haben alle diese Gleichungen, soweit sie nicht rationale Wurzeln haben, imaginär-quadratische Wurzeln. Daraus ergibt sich, daß $\boldsymbol{R}$ von einem der drei in **1** genannten Typen ist; es fehlt nur noch der Nachweis, daß, wenn $\boldsymbol{R}$ nichtkommutativ ist, die Charakteristik p eine Primzahl sein muß, und daß dann die Quotientenalgebra von $\boldsymbol{R}$ außer bei ∞ nur bei p verzweigt ist.

6. Zu diesem Zwecke bestimmen wir die Struktur der Gruppe $\mathfrak{C}$ aller Divisorenklassen endlicher Ordnung von K/k. Die Norm eines natürlichen Multiplikators $n\varepsilon$ ist n^2. Folglich ist die Anzahl T_n der Klassen n-ter Ordnung (Lösungen von $X^n = 1$) gleich n^2/I_n, wo I_n der Inseparabilitätsgrad von $K/K^{n\varepsilon}$ ist. Wegen $T_{nm} = T_nT_m$ genügt es, T_q für Primzahlen q zu berechnen. Wenn $q \neq p$ ist, so ist I_q als Teiler von q^2 gleich 1, daher ist

$$T_n = n^2, \quad \text{falls} \quad n \not\equiv 0 \bmod p.$$

Für $p \neq 0$ ist I_p entweder gleich p oder gleich p^2; $I_p = 1$ ist nicht möglich. Denn die homomorphe Abbildung $\mu \to \mu'$ von $\boldsymbol{R}$ auf einen Teilring von k, die nach § 2 durch das

ganze Differential du von K/k vermittelt wird, $(du)^\mu = \mu' du$, bildet $\mu = p\varepsilon$ auf $(p\varepsilon)' = 0$ ab, weil k die Charakteristik p hat; das ganze Differential von K^{p^ε} ist daher in K gleich 0 und daraus folgt, daß K/K^{p^ε} inseparabel ist. Wir setzen $I_p = p^\sigma$, $\sigma = 1$ oder $= 2$. Dann gilt

$$I_n = p^{f\sigma}, \quad T_n = n^2/p^{f\sigma},$$

wo p^f die in n enthaltene Potenz von p bedeutet.

Hieraus ergibt sich die Struktur von $\mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}_q$ sei die Gruppe aller Klassen, deren Ordnung eine Potenz der Primzahl q ist. $\mathfrak{C}$ ist das direkte Produkt aller $\mathfrak{C}_q$. Für $q \neq p$ ist $\mathfrak{C}_q$ isomorph zur additiven Gruppe aller Paare (r_1, r_2) von Restklassen mod. 1 solcher rationaler Zahlen r_1, r_2 deren Nenner Potenzen von q sind. Ist $p \neq 0$, so ist $\mathfrak{C}_p$ entweder gleich 1, wenn nämlich $\sigma = 2$ ist, oder $\mathfrak{C}_p$ ist zur additiven Gruppe aller Restklassen mod. 1 von rationalen Zahlen isomorph, deren Nenner Potenzen von p sind.

Der volle Automorphismenring $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{C}$ ist die direkte Summe der vollen Automorphismenringe $\mathfrak{A}_q$ aller $\mathfrak{C}_q$. Für $q \neq p$ ist $\mathfrak{A}_q$ der Ring aller quadratischen Matrizen aus ganzen q-adischen Zahlen. Für $p \neq 0$ ist $\mathfrak{A}_p$ gleich 0 für $\sigma = 2$ und der Ring der ganzen p-adischen Zahlen für $\sigma = 1$.

Da ein von 0 verschiedener Multiplikator μ schon für $\mathfrak{C}$ (und nicht erst für die volle Gruppe der Klassen nullten Grades) ein von 0 verschiedener Homomorphismus ist — es gibt ja nur $T^\mu = N(\mu)/I_\mu$ verschiedene X mit $\mu X = 1$ —, so ist $\boldsymbol{R}$ ein Teilring von $\mathfrak{A}$. Aus demselben Grunde geben schon die $\mathfrak{A}_q$-Komponenten der Multiplikatoren ein treues Bild von $\boldsymbol{R}$, den Fall $p \neq 0$, $\sigma = 2$, $q = p$ ausgenommen. Für $q \neq p$ ergeben die $\mathfrak{A}_q$-Komponenten der μ eine rationale q-adische Darstellung zweiten Grades von $\boldsymbol{R}$. Wenn $\boldsymbol{R}$ nichtkommutativ ist und die Quotientenalgebra von $\boldsymbol{R}$ bei q verzweigt ist — sie muß ja mindestens eine endliche Verzweigungsprimstelle haben —, so hat $\boldsymbol{R}$ keine rationale q-adische Darstellung zweiten Grades, sondern nur eine vierten Grades. Folglich muß unter diesen Voraussetzungen der Fall $p \neq 0$, $\sigma = 2$, $q = p$ vorliegen.

Es läßt sich zeigen, daß umgekehrt im Falle $p \neq 0$, $\sigma = 2$ $\boldsymbol{R}$ eine Ordnung, und zwar eine Maximalordnung von Q_α, p ist, und daß jede Maximalordnung von Q_α, p als Multiplikatorenring eines Körpers K der Charakteristik p vorkommt.

Wenn $\boldsymbol{R}$ imaginär-quadratisch ist so ist, der Führer von $\boldsymbol{R}$ nicht durch p teilbar, und jede imaginär-quadratische Ordnung mit nicht durch p teilbarem Führer kommt als Multiplikatorenring eines Körpers K der Charakteristik p vor.

Eingegangen 30. Juni 1939.

Geometrische (Realitäts-)Ordnung und topologische Struktur.

Von *Georg Nöbeling* in Erlangen [1]).

In einem metrischen Raum R sei ein System S beliebiger Mengen C gegeben. Es sei A ein zweiter metrischer Raum und f eine Einbettung von A in den Raum R, d. h. eine eindeutige, stetige Abbildung von A in R. Ist für jede Menge C des Systems S das Urbild $f^{-1}(f(A) \cdot C)$ des Durchschnittes $f(A) \cdot C$ leer oder von endlicher Mächtigkeit, werden also in jede Menge C höchstens endlich viele Punkte von A durch f abgebildet, so sagen wir, A habe bei der Einbettung f eine endliche *Mächtigkeitsordnung* (kurz M-Ordnung) bzgl. S. Sind dabei die Mächtigkeiten der Mengen $f^{-1}(f(A) \cdot C)$ beschränkt, so heißt A von *beschränkter* M-Ordnung und die größte der genannten Mächtigkeiten die *M-Ordnung von A bzgl. S bei der Einbettung f*. Existieren bei einer Einbettung f für eine feste natürliche Zahl h um jeden Punkt von A beliebig kleine Umgebungen mit der M-Ordnung h bzgl. S, so heißt A von der *homogenen M-Ordnung h bzgl. S bei der Einbettung f*; hat dabei auch A selbst die M-Ordnung h bzgl. S bei f, so wird A von der *total homogenen M-Ordnung h bzgl. S bei der Einbettung f* genannt [2]).

Benutzt man in den vorstehenden Definitionen der M-Ordnung an Stelle der Mächtigkeiten der Mengen $f^{-1}(f(A) \cdot C)$ die Dimensionen [3]) dieser Mengen, so gelangt man ganz analog zu den Begriffen der endlichen, beschränkten, (total) homogenen *Dimensionsordnung* (D-Ordnung) von A bzgl. S bei der Einbettung f.

Es sei nun $R = R_k$ der k-dimensionale kartesische Raum, S die Schar aller m-dimensionalen Ebenen [4]) des R_k und A ein Kompaktum [5]) mit einer endlichen Dimension n. Wir behandeln in der vorliegenden Arbeit die folgende Frage:

Welchen Bedingungen muß A genügen, damit A bei einer geeigneten Einbettung in den R_k eine endliche bzw. beschränkte bzw. total homogene M-Ordnung (bzw. D-Ordnung) bzgl. S hat und welche Werte kann diese M-Ordnung (D-Ordnung) annehmen?

---

[1]) Vgl. Fußnote [10]).

[2]) Dieser Begriff der M-Ordnung von A bei einer Einbettung f ist eine naheliegende Verallgemeinerung des Begriffes der Ordnung eines stetigen Streckenbildes im Sinne der Stellenanzahl (vgl. z. B. Haupt, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven ..., Monatshefte f. Math. u. Phys. **40** (1933), 16). Ist A eine Teilmenge von R und f die identische Abbildung von A auf sich, so fällt unser obiger Begriff der M-Ordnung zusammen mit dem üblichen Begriff der geometrischen (Realitäts-)Ordnung. Zu diesem Begriff vgl. den Bericht von Haupt, Geometrische Ordnungen, Jahresber. d. deutschen Mathematiker-Vereinigung **49** (1939), S. 190 ff.

[3]) Die Dimension wird (abgesehen von den Sätzen 2—5 [vgl. Fußnote [10])]) im mengentheoretischen Sinne verstanden; vgl. z. B. Menger, Dimensionstheorie, Leipzig 1928.

[4]) Eine m-dimensionale Ebene ist eine m-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit; eine nulldimensionale Ebene ist ein Punkt.

[5]) Ein Kompaktum ist ein (in sich) kompakter, metrischer oder metrisierbarer Raum.

1. Bei der M-Ordnung unterscheiden wir drei Fälle: $m+n<k$, $m+n=k$, $m+n>k$.

1. I. Der Fall $m+n<k$. Genügt die Dimension n des Kompaktums A der Ungleichung $m+n<k$, so existieren Einbettungen f von A in den R_k, bei welchen A eine M-Ordnung $\leqq s$ hat, wobei s eine beliebig vorgegebene nichtnegative, ganze rationale Zahl $> \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n} - 1$ ist (Satz 1 und 6). Ist außerdem A in sich dicht, so existieren sogar Einbettungen f von A in den R_k, bei welchen die M-Ordnung von A bzgl. S total homogen und gleich s ist (Satz 7). Zusammenfassend können wir also sagen: Die Beschränktheit der M-Ordnung eines n-dimensionalen Kompaktums A bzgl. S bei einer Einbettung f in den R_k stellt im Falle $m+n<k$ keine Einschränkung für die Struktur von A, sondern nur für die Einbettung f dar. Dasselbe gilt, wenn man verlangt, daß die M-Ordnung von A bzgl. S total homogen und gleich einer vorgegebenen natürlichen Zahl $s > \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n} - 1$ sein soll, wofern man noch voraussetzt, daß A in sich dicht ist (eine Bedingung, die nicht nur hinreichend, sondern im Falle $s \geqq 2$ offenbar auch notwendig ist).

1. II. Der Fall $m+n=k$. In diesem Fall wird eine hinreichende Bedingung für beschränkte M-Ordnung bzgl. S durch folgenden Satz geliefert: Ist das Kompaktum A einem n-dimensionalen Polyeder eines kartesischen Raumes homöomorph, so existieren Einbettungen f von A in den R_k, bei welchen A eine beschränkte M-Ordnung bzgl. S hat (Satz 8). Eine gleichzeitig auch notwendige Bedingung für beschränkte (oder endliche oder (total) homogene) M-Ordnung bzgl. S eines n-dimensionalen Kompaktums ist im Falle $m+n=k$ bis heute nicht bekannt.

Nun drängt sich aber bei manchen Überlegungen der Geometrie der (Realitäts)-Ordnungen die Notwendigkeit auf, an Stelle der M-Ordnung bzgl. der Schar S *aller* m-dimensionalen Ebenen des R_k die M-Ordnung bzgl. einer in S offenen und dichten Teilschar S' von S zu betrachten, wobei jedoch i. a. diese Schar S' von A und der Einbettung von A in den R_k abhängt. Für die Endlichkeit der M-Ordnung bzgl. einer solchen Teilschar S' von S kann nun eine zugleich notwendige und hinreichende Bedingung angegeben werden. Damit nämlich das n-dimensionale Kompaktum A (wobei $m+n=k$ ist) eine Einbettung f in den R_k besitze, bei welcher A eine endliche M-Ordnung hat bzgl. einer geeigneten in S offenen und dichten Schar S' und die D-Ordnung 0 bzgl. $T=S-S'$, ist Folgendes notwendig und hinreichend: A ist darstellbar als Summe einer in A offenen, höchstens $(n-1)$-dimensionalen Menge A''' und der abgeschlossenen Hülle A'' einer Summe von höchstens abzählbar vielen, in A'' offenen n-Zellen [6]) $Z_1, Z_2, \ldots$, wobei die Menge $A'=A''-(Z_1+Z_2+\cdots)$ höchstens $(n-1)$-dimensional ist (Satz 9). — Übrigens ist dieser Satz auch dann richtig, wenn man unter S eine Vollschar paralleler m-dimensionaler Ebenen des R_k versteht.

1. III. Der Fall $m+n>k$. Genügt die Dimension n des Kompaktums A dieser Ungleichung, so hat A bei keiner Einbettung in den R_k eine endliche M-Ordnung bzgl. S (nicht einmal bzgl. einer vollen Parallelschar m-dimensionaler Ebenen) (Satz 10).

2. Für die D-Ordnung liegen die Verhältnisse wesentlich einfacher. Einerseits ist nämlich bei jeder Einbettung eines n-dimensionalen Kompaktums A in den R_k die D-Ordnung bzgl. S (sogar bzgl. jeder vollen Parallelschar m-dimensionaler Ebenen) mindestens gleich $m+n-k$ (Satz 10). Andererseits existieren für jede nichtnegative, ganze rationale Zahl s mit $m+n-k \leqq s \leqq n$ Einbettungen f des gegebenen n-dimen-

[6]) Eine n-Zelle ist ein topologisches Bild des kartesischen R_n.

sionalen Kompaktums in den R_k, bei welchen A die total homogene D-Ordnung s bzgl. S hat (Satz 12); vorauszusetzen ist hierbei natürlich, daß die Menge aller Punkte von A, in denen A eine Dimension $\geqq s$ hat, in A dicht ist.

3. Die sämtlichen Einbettungen f, deren Existenz in den vorstehenden Abschnitten **1**, I—III und **2** behauptet wird, können aus beliebig vorgegebenen Einbettungen durch beliebig kleine Änderungen erzeugt, und falls $2n + 1 \leqq k$ ist, sogar topologisch gewählt werden (Satz 13).

Das erste im Abschnitt **1.** I genannte Ergebnis unserer Arbeit enthält als Spezialfall den Einbettungssatz der Dimensionstheorie [7]). Setzt man nämlich zunächst S gleich dem System aller nulldimensionalen Ebenen, d. h. aller Punkte des R_k und damit $m = 0$, so liefert jenes Ergebnis für jedes $s > \frac{k}{k-n} - 1 = \frac{n}{k-n}$ die Existenz von Einbettungen f, bei welchen jeder Bildpunkt von A höchstens s Urbildpunkte in A hat [8]). Gilt dabei noch $2n + 1 \leqq k$, so ist $\frac{n}{k-n} < 1$, so daß also die Zahl $s = 1$ die Bedingung $s > \frac{n}{k-n}$ befriedigt. Daher existieren Einbettungen f des n-dimensionalen Kompaktums A in den R_k mit $2n + 1 \leqq k$, bei welchen A die Ordnung 1 hat bzgl. des Systems aller nulldimensionalen Ebenen, d. h. aller Punkte des R_k. Solche Abbildungen f sind aber topologisch.

§ 1. Vorbereitungen.

1. Es erweist sich als nützlich, das System *aller Einbettungen* (d. h. aller eindeutigen, stetigen Abbildungen) eines Kompaktums A in den k-dimensionalen kartesischen Raum R_k $(k = 1, 2, \ldots)$ durch folgende Definition zu einem *metrischen Raum* F zu machen: Der *Abstand* zweier Einbettungen f und g von A in den R_k sei das Maximum der Abstände der Punkte $f(P)$ und $g(P)$ des R_k, wobei P alle Punkte von A durchläuft. Dieser metrische Raum F aller Einbettungen des Kompaktums A in den R_k ist vollständig [9]). Man beweist dies analog wie die Existenz und Stetigkeit des Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall.

2. Zur Vermeidung komplizierter Grenzübergänge werden wir ausgiebigen Gebrauch machen von folgendem bekannten Satz [9]): *Der Durchschnitt abzählbar vieler, in einem vollständigen metrischen Raum dichter G_δ-Mengen ist ein im Raum dichtes G_δ* (insbesondere also nicht leer). Da ein (metrisiertes) Kompaktum vollständig ist, gilt dieser Satz insbesondere in einem metrisierten Kompaktum.

Wir werden den genannten Satz mehrfach auf den obigen Raum F anwenden. Um beispielsweise die Existenz von Einbettungen zu zeigen, bei welchen das Kompaktum A eine M-Ordnung $\leqq s$ hat, werden wir die Menge aller dieser Einbettungen darstellen als Durchschnitt einer Folge von in F dichten und offenen Mengen; dann ist nach dem genannten Satz dieser Durchschnitt ebenfalls in F dicht und daher nicht leer, womit der Existenzbeweis geliefert ist.

---

[7]) Der genaue Wortlaut des Satzes 6 liefert den genannten Satz sogar in der verschärften Form, daß die Menge aller topologischen Einbettungen eines n-dimensionalen Kompaktums A in einen R_k mit $2n + 1 \leqq k$ ein dichtes G_δ ist im Raum F aller Einbettungen von A in den R_k (siehe hierzu § 1, Nr. **1**). Hurewicz, Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, Sitzungsber. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1933, 754—768.

[8]) Dies ist bereits bekannt: Man ersetze in der in der Fußnote [7]) genannten Arbeit im Haupttheorem S. 755 m durch $k - n$ und spezialisiere k auf $s + 1$.

[9]) Vgl. z. B. Alexandroff-Hopf, Topologie **1**, Berlin 1935, 104ff.

3. Es sei m eine nichtnegative, ganze rationale Zahl $< k$. Eine *Schar* (beliebige Menge) von m-dimensionalen Ebenen des R_k heiße *abgeschlossen*, wenn der Limes einer konvergenten Folge von Ebenen der Schar ebenfalls in der Schar enthalten ist. Sie heiße *algebraisch*, wenn sie aus allen m-dimensionalen Ebenen des R_k besteht, deren Plückersche Koordinaten einer oder mehreren algebraischen Gleichungen genügen. Schließlich heiße eine Schar eine *Vollschar*, wenn jeder Punkt des R_k in mindestens einer Ebene der Schar enthalten ist.

4. Es sei n eine zweite nichtnegative, ganze rationale Zahl derart, daß $m + n < k$ ist. Ein System von h Ebenen der Dimension n des R_k wollen wir kurz eine *Reihe der Länge h* nennen. Eine m-dimensionale Ebene des R_k, welche mit jeder Ebene der Reihe einen nicht-leeren Durchschnitt hat, heiße eine *Transversale* der Reihe.

5. Wir behaupten den folgenden

Satz 1. *Es seien k, m und n drei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m + n < k$. Genügt die natürliche Zahl h der Ungleichung*

$$h > \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n}, \tag{1}$$

so existiert zu jeder Reihe der Länge h von n-dimensionalen Ebenen des R_k eine beliebig benachbarte Reihe ohne m-dimensionale Transversale.

Zum Beweis dieses Satzes bezeichnen wir mit $\overline{R}_k$ den reellen, k-dimensionalen, projektiven Raum, welcher den R_k enthält. Die in Nr. **3** und **4** entwickelten Begriffe übertragen sich ohne weiteres auf den Raum $\overline{R}_k$. Es genügt, den Satz 1 im Raum $\overline{R}_k$ oder noch allgemeiner in einem beliebigen k-dimensionalen projektiven Raum S_k zu beweisen.

Wir [10]) beweisen nun zunächst den folgenden

Satz 2. *Es seien k, m und n drei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m + n < k$, und S_k ein k-dimensionaler projektiver Raum. Dann bilden die Reihen der Länge h von n-dimensionalen Ebenen des S_k, die eine m-dimensionale Transversale besitzen, eine (rationale) irreduzible, algebraische Mannigfaltigkeit M von einer Dimension*

$$d \leqq (m+1)(k-m) + hm + hn(k-n). \tag{2}$$

Beweis des Satzes 2. Eine allgemeine Reihe von M wird erhalten, indem man von einer allgemeinen Ebene E von der Dimension m ausgeht, in dieser h allgemeine Punkte wählt und durch jeden dieser Punkte eine allgemeine Ebene E_1 bzw. $E_2, \ldots, E_h$ von der Dimension n legt. Es ist klar, daß man jede Reihe aus M durch relationstreue Spezialisierung aus der angegebenen allgemeinen Reihe erhält. Also ist M eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit. Nun hängt die allgemeine Ebene E bekanntlich von $(m+1)(k-m)$ unbestimmten Parametern ab, ein allgemeiner Punkt in E noch von m Parametern, und eine allgemeine Ebene wie E_1 durch einen vorgegebenen Punkt von $n(k-n)$ Parametern. Also hängt die allgemeine Reihe rational von

$$(m+1)(k-m) + hm + hn(k-n)$$

unbestimmten Parametern ab. Daher hat M höchstens diese Dimension. Damit ist Satz 2 bewiesen.

---

[10]) Den weiteren Inhalt des § 1 verdanke ich Herrn B. L. van der Waerden (ebenso die Bezeichnung „Reihe" und „Transversale"), der mir die obigen Resultate in einem Brief vom 7. 4. 1939 mitteilte und liebenswürdigerweise zur Veröffentlichung zur Verfügung stellte. Alle folgenden Begriffe des § 1 sind in dem Sinne gemeint, den sie in der algebraischen Geometrie haben; dies gilt insbesondere für den Dimensionsbegriff; ist z. B. S_k der komplexe projektive Raum, so ist seine algebraische Dimension halb so groß wie seine topologische. Die benutzten Sätze aus der algebraischen Geometrie sind zu finden bei van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie XIII, Math. Ann. **115** (1938), 359—378, oder Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939.

Nun zum *Beweis des Satzes* 1. Die Dimension der Gesamtheit aller Reihen beträgt $h(n+1)(k-n)$. Genügt daher h der mit (1) gleichwertigen Ungleichung

$$(m+1)(k-m)+hm+hn(k-n)<h(n+1)(k-n),$$

so hat also M eine kleinere Dimension als die Gesamtheit aller Reihen der Länge h von n-dimensionalen Ebenen. Nun hängen die Reihen in der Umgebung einer festen Reihe rational von $h(n+1)(k-n)$ Parametern ab. Damit die Reihe zu M gehört, muß zwischen den Parametern mindestens eine algebraische Gleichung bestehen. In beliebig kleinen Umgebungen gibt es aber Parameterwerte, die diese Gleichung nicht befriedigen, deren zugehörige Reihen also nicht in M enthalten sind. Besteht daher die Ungleichung (1), so existiert zu jeder Reihe eine beliebig benachbarte Reihe ohne m-dimensionale Transversale. Damit ist Satz 1 bewiesen.

6. Der Satz 1 kann verschärft werden zu folgendem

Satz 1 a. *Es seien k, m und n drei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m+n<k$, T eine an jeder Stelle im Sinne der Topologie l-dimensionale algebraische*[11]) *Schar m-dimensionaler Ebenen des R_k $(0\leqq l\leqq(m+1)(k-m))$ und h eine natürliche Zahl, welche der Bedingung*

$$h>\frac{l}{k-m-n}$$

genügt. Dann existiert zu jeder Reihe der Länge h von n-dimensionalen Ebenen des R_k eine beliebig benachbarte Reihe, für welche die Schar T keine Transversale enthält.

Analog wie Satz 1 aus Satz 2 ergibt sich dieser Satz 1 a aus

Satz 2 a. *Es seien k, m und n drei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m+n<k$, S_k ein k-dimensionaler projektiver Raum und T eine l-dimensionale algebraische Schar m-dimensionaler Ebenen des S_k. Dann bilden die Reihen der Länge h von n-dimensionalen Ebenen des S_k, die eine Transversale aus T besitzen, eine algebraische Mannigfaltigkeit M von einer Dimension*

$$d\leqq l+hm+hn(k-n).$$

Der Beweis dieses Satzes 2 a verläuft analog wie der Beweis des Satzes 2, indem man darin statt $(m+1)(k-m)$ immer l schreibt.

7. Für jedes natürliche $m<k$ existiert im projektiven S_k eine algebraische Mannigfaltigkeit der Dimension $k-m$, die mit jeder m-dimensionalen Ebene des S_k einen nulldimensionalen Durchschnitt (also eine beschränkte Anzahl von Punkten) gemein hat. Wir werden eine solche Mannigfaltigkeit konstruieren, und zwar als Durchschnitt von Hyperflächen genügend hohen Grades (Satz 5).

Eine Hyperfläche vom Grade g im projektiven S_k hat $\binom{g+k}{k}$ Koeffizienten; also kann man diese Hyperflächen auf Punkte eines Raumes S_N von der Dimension $N=\binom{g+k}{k}-1$ abbilden. Die Reihen von h Hyperflächen $F_1,\ldots,F_h$ $(h\leqq k)$ können demnach auf Punkte eines mehrfach-projektiven Raumes $S_{N,\ldots,N}$ von der Dimension hN abgebildet werden. Nun wird behauptet:

Satz 3. *Die Reihen von Hyperflächen, deren Durchschnitt eine Dimension $>k-h$ hat, bilden in $S_{N,\ldots,N}$ eine algebraische Mannigfaltigkeit M von einer Dimension $<hN-g$.*

Beweis. Für $h=1$ ist die Behauptung trivial, da M dann leer ist. Wir machen die Induktionsvoraussetzung, der Satz 3 sei bereits für $h-1$ bewiesen.

[11]) In diesem Satz kann die Voraussetzung, daß T algebraisch ist, nicht ersetzt werden durch die schwächere Voraussetzung, daß T abgeschlossen ist. Für $m=0, n=1, k=2$ zeigt dies die Existenz abgeschlossener nulldimensionaler Teilmengen T der Ebene, die mit jeder Geraden nichtleere Durchschnitte haben (vgl. z. B. Antoine, Diss. Straßburg (1921) oder Fund. math. **5** (1924), S. 265—287).

Die Gleichungen für M erhält man, indem man die Resultante von $F_1, \ldots, F_h$ und $k-h+1$ Linearformen $(ux), (vx), \ldots, (wx)$ identisch in $u, v, \ldots, w$ gleich Null setzt. Also ist M eine algebraische Mannigfaltigkeit. Es sei I ein irreduzibler Bestandteil von M. Es ist zu beweisen, daß I eine Dimension $< hN-g$ hat.

I kann als algebraische Korrespondenz zwischen den Reihen $F_1, \ldots, F_{h-1}$ und den Hyperflächen F_h aufgefaßt werden. $(\Phi_1, \ldots, \Phi_{h-1}, \Phi_h)$ sei das allgemeine Element der Korrespondenz. Ihre Dimension ist nach dem Prinzip der Konstantenzählung $q = a + b$, wo a die Dimension der Urmannigfaltigkeit der Korrespondenz und b die Zahl der unabhängigen Parameter ist, von denen Φ_h bei festgehaltenen $\Phi_1, \ldots, \Phi_{h-1}$ noch abhängt.

1. Fall. $\Phi_1, \ldots, \Phi_{h-1}$ haben einen Durchschnitt von einer Dimension $> k-(h-1)$. Dann ist nach der Induktionsvoraussetzung $a < (h-1)N-g$; weiter ist trivialerweise $b \leqq N$; also folgt

$$q = a + b < (h-1)N - g + N = hN - g.$$

2. Fall. $\Phi_1, \ldots, \Phi_{h-1}$ haben einen Durchschnitt von der Dimension $k-(h-1)$. Φ_h enthält dann mindestens einen irreduziblen Bestandteil dieses Durchschnittes (denn sonst hätte der Durchschnitt aller Φ_ν nur die Dimension $k-h$). Ist C ein solcher irreduzibler Bestandteil, so wählen wir $g+1$ verschiedene Punkte Q_i auf C. Daß Φ_h diese Punkte enthalten soll, wird durch $g+1$ lineare Gleichungen in den Koeffizienten von Φ_h ausgedrückt. Diese Gleichungen sind unabhängig, denn es gibt stets eine zerfallende Hyperfläche F, die durch irgend g von den Punkten Q_i, aber nicht durch den $(g+1)$-ten geht (man braucht ja nur F in g Hyperebenen zerfallen zu lassen, die je einen von diesen g Punkten enthalten). Also hängt Φ_h bei festgehaltenen $\Phi_1, \ldots, \Phi_{h-1}$ von höchstens $N-(g+1)$ unabhängigen Parametern ab. Es ist also $a \leqq (h-1)N$ und $b \leqq N-(g+1)$, mithin

$$q = a + b < hN - g.$$

Satz 4. *Die Reihen von h Hyperflächen vom Grade g, die mit einer gegebenen Ebene von der Dimension m einen mehr als $(m-h)$-dimensionalen Durchschnitt haben, bilden eine algebraische Mannigfaltigkeit von einer Dimension $< hN-g$.*

Beweis. Wir verwenden dieselbe Beweismethode wie für Satz 3. Der Schluß von $h-1$ auf h ist der gleiche wie beim Satz 3. Nur der Fall $h=1$ ist hier nicht mehr ganz so trivial: man wählt $g+1$ verschiedene Punkte in der gegebenen Ebene; damit die Hyperfläche F_1 diese Punkte enthält, muß sie $g+1$ unabhängige lineare Bedingungen erfüllen; also ist die Dimension der Mannigfaltigkeit derjenigen Hyperflächen F_1, die die gegebene Ebene enthalten, kleiner als $N-g$.

Im folgenden kommt nur der Fall $h=m$ des Satzes 4 zur Verwendung.

Satz 5. *Für genügend großes g gibt es eine Reihe von m Hyperflächen g-ten Grades, deren Durchschnitt mit jeder Ebene E von der Dimension m genau nulldimensional ist.*

Beweis. Wir betrachten eine Korrespondenz K zwischen den Ebenen E von der Dimension m einerseits und den Reihen von m Hyperflächen vom Grade g, die mit E einen mehr als nulldimensionalen Durchschnitt haben, andererseits. Daß die Korrespondenz algebraisch ist, folgt wie oben (vgl. den Beweis des Satzes 3). Es sei K' einer ihrer irreduziblen Bestandteile, M' die Urmannigfaltigkeit, N' die Bildmannigfaltigkeit von K'. Nach dem Prinzip der Konstantenzählung ist $a+b=c+d$, wobei a die Dimension von M' und c die von N' ist. Nach Satz 3 ist $b < hN-g$. Trivialerweise ist

$$a \leqq (m+1)(k-m).$$

Es folgt

$$c \leqq a + b < hN - g + (m+1)(k-m),$$

also $c < hN$, sobald $g \geqq (m+1)(k-m)$ ist. Das heißt aber: Für genügend großes g ist die Bildmannigfaltigkeit N' nicht der ganze Raum $S_{N,\ldots,N}$. Dasselbe gilt für alle irreduziblen Bestandteile der Korrespondenz und somit auch für die ganze Korrespondenz.

§ 2. Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Voraussetzungen. Es seien k, m und n drei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m+n<k$; L ein n-dimensionaler Komplex eines kartesischen Raumes; π eine simpliziale* [12]) *Einbettung von L in den R_k; ζ eine positive Zahl; S eine abgeschlossene Schar m-dimensionaler Ebenen des R_k; s eine nichtnegative, ganze rationale Zahl mit folgender Eigenschaft: zu jeder Reihe n-dimensionaler Ebenen des R_k mit einer Länge $s+1$ existiert eine beliebig benachbarte Reihe ohne Transversale in S.*

Behauptung. Es existiert eine bzgl. einer Unterteilung von L simpliziale Einbettung ψ von L in den R_k, welche von π einen Abstand $<\zeta$ hat und außerdem die folgende Eigenschaft besitzt: für jede Ebene E der Schar S ist die Menge $\psi^{-1}(\psi(L)\cdot E)$ überdeckbar durch s in L offene Teilmengen von L mit Durchmessern $\leqq\zeta$.

Beweis. Wir nehmen den Komplex L sofort so fein trianguliert an, daß jedes Simplex von L einen Durchmesser $<\frac{\zeta}{6}$ hat. Bei dieser Triangulierung sei L die Summe der Simplexe $S_1, \ldots, S_j$.

Dem eigentlichen Beweis schicken wir Folgendes voraus:

Vorbemerkung. Es sei $S_{j_0}, \ldots, S_{j_s}$ ein $(s+1)$-Tupel paarweise fremder Simplexe von L und t die Anzahl solcher $(s+1)$-Tupel. Auf Grund der s betreffenden Voraussetzung unseres Hilfssatzes können wir die π-Bilder der Ecken von L um weniger als $\frac{\zeta}{t}$ derart verrücken, daß die dadurch bestimmte simpliziale Einbettung π' von L in den R_k (von π einen Abstand $<\zeta$ und außerdem) die folgende Eigenschaft $\mathfrak{E}$ hat: die π'-Bilder der Simplexe $S_{j_0}, \ldots, S_{j_s}$ haben keine Transversale in der Schar S. Wir behaupten, daß diese Eigenschaft $\mathfrak{E}$ dann auch jeder simplizialen Einbettung π'' von L in den R_k zukommt, die aus π' durch eine hinreichend kleine Verrückung der π'-Bilder der Ecken von L hervorgeht. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann gäbe es für jede natürliche Zahl i erstens eine simpliziale Einbettung π_i von L in den R_k, die aus π' durch eine Verrückung $<i^{-1}$ der π'-Bilder der Ecken von L entsteht und zweitens eine Transversale E^i der Simplexe $\pi_i(S_{j_0}), \ldots, \pi_i(S_{j_s})$, welche in S enthalten ist. Für $i\to\infty$ konvergieren die Simplexe $\pi_i(S_{j_0}), \ldots, \pi_i(S_{j_s})$ gegen die Simplexe $\pi'(S_{j_0}), \ldots, \pi'(S_{j_s})$. Die Folge der Ebenen $E^1, E^2, \ldots$ besitzt mindestens eine Häufungsebene E, die wegen der Abgeschlossenheit von S in S enthalten und eine Transversale der Simplexe $\pi'(S_{j_0}), \ldots, \pi'(S_{j_s})$ ist. Dies widerspricht aber der Konstruktion von π'.

Es seien nun $\mathfrak{T}_1, \ldots, \mathfrak{T}_t$ die sämtlichen $(s+1)$-Tupel paarweise fremder Simplexe von L. Auf Grund der Vorbemerkung existiert zunächst eine simpliziale Einbettung π_1, die in Bezug auf das $(s+1)$-Tupel $\mathfrak{T}_1$ die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt. Gehen wir nun von π_1 statt von π aus, so liefert die Vorbemerkung eine simpliziale Einbettung π_2, welche die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ in Bezug auf die beiden $(s+1)$-Tupel $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ besitzt. So fahren wir fort. Nach t Schritten erhalten wir eine simpliziale Einbettung $\pi_t = \psi$ von L in den R_k, die aus π durch eine Gesamtverrückung $<t\cdot\frac{\zeta}{t}=\zeta$ der π-Bilder der Ecken von L her-

[12]) Ist K ein endlicher oder unendlicher Komplex, so nennt man eine Einbettung simplizial, wenn sie auf jedem Simplex der vorliegenden Triangulierung von K affin ist. Eine simpliziale Einbettung ist eindeutig bestimmt durch die Einbettung der Ecken von K.

vorgeht, also von π einen Abstand $< \zeta$ hat, und die folgende Eigenschaft besitzt: ist $S_{j_0}, \ldots, S_{j_s}$ ein beliebiges $(s+1)$-Tupel paarweise fremder Simplexe von L, so ist keine Ebene aus S eine Transversale der Bilder $\psi(S_{j_0}), \ldots, \psi(S_{j_s})$.

Diese Einbettung ψ genügt der Behauptung unseres Hilfssatzes 1. Daß ψ von π einen Abstand $< \zeta$ hat, wurde bereits festgestellt. Wir haben also nur noch zu zeigen: Ist E eine beliebige Ebene der Schar und D der Durchschnitt $\psi(L) \cdot E$, so ist die Menge $\psi^{-1}(D)$ überdeckbar durch s in L offene Teilmengen von L. Falls D leer ist, haben wir nichts zu beweisen. Es sei also D nicht leer. Dann enthält L ein Simplex S_{j_1} mit $\psi(S_{j_1}) \cdot E \neq 0$. Es sei dann T_1 die Summe aller zu S_{j_1} nicht fremden Simplexe von L. Da die Simplexe von L Durchmesser $< \frac{\zeta}{6}$ haben, so hat T_1 einen Durchmesser $< \frac{\zeta}{2}$. Ist nun $\psi^{-1}(D)$ nicht in T_1 enthalten, so existiert in L ein nicht in T_1 enthaltenes, also zu S_{j_1} fremdes Simplex S_{j_2} mit $\psi(S_{j_2}) \cdot E \neq 0$. Es sei T_2 die Summe aller zu S_{j_2} nicht fremder Simplexe von L. Wie T_1 hat auch T_2 einen Durchmesser $< \frac{\zeta}{2}$. Ist nun $\psi^{-1}(D)$ nicht in $T_1 + T_2$ enthalten, so enthält L ein nicht in $T_1 + T_2$ enthaltenes, also zu S_{j_1} und S_{j_2} fremdes Simplex S_{j_3} mit $\psi(S_{j_3}) \cdot E \neq 0$, usw. Da für höchstens s Simplexe $S_{j_1}, \ldots, S_{j_s}$ von L die ψ-Bilder mit E nichtleere Durchschnitte haben können, bricht das Verfahren nach $\sigma \leqq s$ Schritten dadurch ab, daß $\psi^{-1}(D) < T_1 + \cdots + T_\sigma$ gilt. Für $i = 1, \ldots, s$ wählen wir nun in L einen Punkt P_i, der für $i \leqq \sigma$ in T_i enthalten ist, und bezeichnen mit O_i die in L offene Menge aller Punkte von L, die von P_i Abstände $< \frac{\zeta}{2}$ haben. Dann hat O_i einen Durchmesser $\leqq \zeta$ und es gilt $T_1 + \cdots + T_\sigma \leqq O_1 + \cdots + O_\sigma$, also $\psi^{-1}(D) = \psi^{-1}(\psi(A) \cdot E) < O_1 + \cdots + O_s$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Hilfssatz 2. *Voraussetzungen. Es seien k eine natürliche Zahl, $m < k$ und n zwei nichtnegative, ganze rationale Zahlen; L ein n-dimensionaler Komplex eines kartesischen Raumes; π eine simpliziale Einbettung von L in den R_k; ζ eine positive Zahl; s eine nichtnegative, ganze rationale Zahl $\geqq m + n - k$.*

Behauptung. Es existiert eine bzgl. einer Unterteilung von L simpliziale Einbettung ψ von L in den R_k, welche von π einen Abstand $< \zeta$ und außerdem die folgende Eigenschaft besitzt: für jede m-dimensionale Ebene E des R_k ist die Menge $\psi^{-1}(\psi(L) \cdot E)$ überdeckbar durch endlich viele offene Teilmengen von L, deren Durchmesser $\leqq \zeta$ sind und deren abgeschlossene Hüllen zu je $s+2$ einen leeren Durchschnitt haben.

Beweis. Es sei zunächst $n < k - m$, also $k - m - n > 0$. Dann genügt es, die Behauptung für $s = 0$ zu beweisen. Es sei t eine natürliche Zahl $\geqq \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n}$ Nach Satz 1 existiert dann zu jeder Reihe der Länge $t+1$ von n-dimensionalen Ebenen des R_k eine beliebig benachbarte Reihe ohne m-dimensionale Transversale. Nach Hilfssatz 1, worin wir ζ durch $\frac{\zeta}{t}$ und s durch t ersetzen, und unter S die Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k verstehen, existiert also eine bzgl. einer Unterteilung von L simpliziale Einbettung ψ von L in den R_k, welche von π einen Abstand $< \zeta \left(\text{sogar} < \frac{\zeta}{t}\right)$. hat und folgende Eigenschaft besitzt: für jede m-dimensionale Ebene E des R_k ist die Menge $\psi^{-1}(\psi(L) \cdot E)$ überdeckbar durch t in L offene Teilmengen $O'_1, \ldots, O'_t$ mit Durchmessern $\leqq \frac{\zeta}{t}$. Wir nennen vorübergehend zwei dieser Mengen, etwa O'_i und O'_j gekoppelt, wenn es unter den $O'_1, \ldots, O'_t$ Mengen $O'_{i_1}, \ldots, O'_{i_k}$ gibt derart, daß $O'_i = O'_{i_1}$ und $O'_j = O'_{i_k}$

ist und außerdem je zwei aufeinander folgende Mengen $\overline{O}'_{i_\varkappa}$ und $\overline{O}'_{i_{\varkappa+1}}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k-1)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben. Das System der Mengen $O'_1, \ldots, O'_t$ ist die Vereinigung von größten Teilsystemen paarweise gekoppelter Mengen. Für jede dieser Teilsysteme bilden wir die Summe der in ihm enthaltenen Mengen. Die so entstehenden Mengen $O_1, \ldots, O_r$ sind als Summen von Mengen $O'_1, \ldots, O'_t$ in L offene Teilmengen von L, die wegen $O_1 + \cdots + O_r = O'_1 + \cdots + O'_t$ die Menge $\psi^{-1}(\psi(L) \cdot E)$ überdecken. Aus ihrer Definition folgt unmittelbar, daß ihre abgeschlossenen Hüllen paarweise fremd sind; außerdem, daß der Durchmesser einer Menge O_σ höchstens gleich der Summe der Durchmesser der in O_σ enthaltenen Mengen O'_σ ist; da die Mengen O'_σ Durchmesser $\leqq \frac{\zeta}{t}$ haben und ihre Anzahl gleich t ist, hat jede Menge O_σ einen Durchmesser $\leqq \zeta$. Damit ist der Hilfssatz 2 im Falle $n < k - m$ bewiesen.

Wir machen nun die Induktionsvoraussetzung, die Behauptung des Hilfssatzes 2 sei bereits bewiesen für irgendein nichtnegatives ganz rationales n. Zum Beweis für $n+1$ sei L jetzt $(n+1)$-dimensional und $s \geqq m + (n+1) - k$. Wir nehmen L sofort so fein unterteilt an, daß jedes Simplex von L einen Durchmesser $\leqq \frac{\zeta}{3}$ hat; diese Triangulierung von L nennen wir $\mathfrak{T}$. Es sei L^* die Summe aller höchstens n-dimensionalen $\mathfrak{T}$-Simplexe von L, einschließlich der Randsimplexe der $(n+1)$-dimensionalen $\mathfrak{T}$-Simplexe $S_1, \ldots, S_h$ von L. Nach der Induktionsvoraussetzung $\left(\text{mit } \frac{\zeta}{3} \text{ statt } \zeta\right)$ existiert erstens eine Triangulierung $\mathfrak{T}^*$ von L^*, welche eine Unterteilung von $\mathfrak{T}$ ist, diese im Augenblick nur auf L^* betrachtet; zweitens existiert eine bzgl. $\mathfrak{T}^*$ simpliziale Einbettung ψ von L^* in den R_k, welche von π, im Augenblick nur auf L^* betrachtet, einen Abstand $< \zeta \left(\text{sogar} < \frac{\zeta}{3}\right)$ hat und außerdem folgende Eigenschaft besitzt: für jede m-dimensionale Ebene E des R_k ist $\psi^{-1}(\psi(L^*) \cdot E)$ überdeckbar durch endlich viele in L^* offene Teilmengen $O_1^*, \ldots, O_r^*$ von L^* mit Durchmessern $\leqq \frac{\zeta}{3}$, deren abgeschlossene Hüllen zu je $s+1$ einen leeren Durchschnitt haben (man beachte, daß $s+1 = (s-1)+2$ und jetzt $s - 1 \geqq m + n - k$ ist). Wir setzen nun erstens die Triangulierung $\mathfrak{T}^*$ von L^* fort auf ganz L, indem wir jedes $(n+1)$-dimensionale Simplex S_i $(i = 1, \ldots, h)$ von L darstellen als Summe der Simplexe, die vom Mittelpunkt M_i von S_i und den im Rande T_i von S_i enthaltenen $\mathfrak{T}^*$-Simplexen aufgespannt werden; die so entstehende Unterteilung von $\mathfrak{T}$ nennen wir $\mathfrak{T}^*$; sie stimmt auf L^* überein mit der durch die Induktionsvoraussetzung gelieferten Triangulierung $\mathfrak{T}^*$. Zweitens setzen wir die Einbettung ψ von L^* auf ganz L fort: nach Definition der Triangulierung $\mathfrak{T}^*$ von L genügt es, ψ für die Mittelpunkte M_i der $\mathfrak{T}$-Simplexe S_i zu definieren; wir setzen $\psi(M_i) = \pi(M_i)$ $(i = 1, \ldots, h)$; dann ist ψ eine bzgl. $\mathfrak{T}^*$ simpliziale Einbettung von L in den R_k, die auf L^* mit der durch die Induktionsvoraussetzung gelieferten Einbettung ψ von L^* identisch ist; da die Einbettung π simplizial ist bzgl. $\mathfrak{T}$ und infolgedessen auch bzgl. der Unterteilung $\mathfrak{T}^*$ von $\mathfrak{T}$ und da ψ von π sowohl auf dem Komplex L^* wie auch in den Mittelpunkten $M_i (i = 1, \ldots, h)$ einen Abstand $< \zeta$ hat, so hat ψ von π auf ganz L einen Abstand $< \zeta$. Drittens erweitern wir jede der in L^* offenen Teilmengen O_ϱ^* $(\varrho = 1, \ldots, r)$ von L^* folgendermaßen zu in L offenen Teilmengen von L: hat O_ϱ^* mit dem Rand T_i von S_i einen nichtleeren Durchschnitt, so addieren wir zu O_ϱ^* für jeden Punkt P von $O_\varrho^* \cdot T_i$ die in P endende, offene Hälfte der Verbindungsstrecke von M_i mit P $(i = 1, \ldots, r)$; die so aus O_ϱ^* entstehende, in L offene Teilmenge von L bezeichnen wir mit O_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, r)$. Aus der Konstruktion der O_ϱ folgt unmittelbar, daß die abgeschlossenen Hüllen von Mengen O_ϱ

dann und nur dann einen nichtleeren Durchschnitt haben, wenn die abgeschlossenen Hüllen der entsprechenden Mengen O_ϱ^* einen nichtleeren Durchschnitt haben; dann haben also insbesondere die abgeschlossenen Hüllen von je $s+1$ Mengen O_ϱ einen leeren Durchschnitt. Ebenso ergibt sich aus der Tatsache, daß sowohl die Mengen O_ϱ^* als auch die Simplexe S_i Durchmeessr $\leqq \frac{\zeta}{3}$ haben, die Folgerung, daß die Mengen O_ϱ Durchmesser $\leqq \zeta$ haben. Wegen $O_\varrho^* < O_\varrho$ gilt schließlich $L^* \cdot \psi^{-1}(\psi(L) \cdot E) < O_1 + \cdots + O_r$, da $L^* \cdot \psi^{-1}(\psi(L) \cdot E) < O_1^* + \cdots + O_r^*$ gilt nach Wahl der O_ϱ^*. Um nun auch die durch $O_1 + \cdots + O_r$ nicht überdeckte Teilmenge $L_E - (O_1 + \cdots + O_r)$ von $L_E = \psi^{-1}(\psi(L) \cdot E)$ zu überdecken, fügen wir zu den Mengen $O_1, \ldots, O_r$ noch weitere Mengen folgendermaßen hinzu. Die Menge $L_E - (O_1 + \cdots + O_r)$ ist eine Teilmenge der Summe $K_1 + \cdots + K_h$ der offenen Kerne K_i der $(n+1)$-dimensionalen $\mathfrak{T}$-Simplexe $S_1, \ldots, S_h$ von L, da $L^* \cdot L_E = (L - (K_1 + \cdots + K_h)) \cdot L_E$ durch $O_1 + \cdots + O_r$ überdeckt ist. Es sei i eine der Zahlen $1, \ldots, h$. Wenn $K_i \cdot (L_E - (O_1 + \cdots + O_r))$ leer ist, so setzen wir O_{r+i} gleich der leeren Menge. Es sei nun die Menge $K_i \cdot (L_E - (O_1 + \cdots + O_r)$ nicht leer. Diese Menge ist dann, da die Mengen $O_1, \ldots, O_r$ in L offen sind und den Durchschnitt $L^* \cdot L_E$, insbesondere also den Durchschnitt $T_i \cdot L_E$ des Randes T_i von S_i mit L_E überdecken, in L abgeschlossen und hat daher von T_i einen positiven Abstand δ_i. Wir bezeichnen nun mit O_{r+i} die in L offene Menge aller Punkte von K_i, die von T_i einen Abstand $> \frac{\delta}{2}$ haben. Dann gilt

$$K_i \cdot (L_E - (O_1 + \cdots + O_r)) < O_{r+i} \qquad (i = 1, \ldots, h),$$

also wegen $L_E - (K_1 + \cdots + K_h) = L_E \cdot L^* < O_1 + \cdots + O_r$ weiter

$$L_E < O_1 + \cdots + O_r + O_{r+1} + \cdots + O_{r+h},$$

d. h. die in L offenen Teilmengen $O_1, \ldots, O_{r+h}$ überdecken die Menge $L_E = \psi^{-1}(\psi(L) \cdot E)$. Die Mengen $O_{r+1}, \ldots, O_{r+h}$ haben als Teilmengen der Simplexe $S_1, \ldots, S_h$ Durchmesser $\leqq \zeta$ $\left(\text{sogar} \leqq \frac{\zeta}{3}\right)$, da diese Simplexe nach Wahl von $\mathfrak{T}$ Durchmesser $\leqq \frac{\zeta}{3}$ haben. Schließlich haben je zwei Mengen $\bar{O}_{r+i}$ und $\bar{O}_{r+j}$ einen leeren Durchschnitt, da sie in den offenen Kernen K_i bzw. K_j enthalten und diese fremd sind. Hieraus folgt nun, daß je $s+2$ der abgeschlossenen Hüllen $\bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_{r+h}$ einen leeren Durchschnitt haben; denn entweder kommen unter diesen $s+2$ Hüllen zwei Mengen $\bar{O}_{r+i}$ und $\bar{O}_{r+j}$ vor, und dann haben bereits diese beiden Mengen einen leeren Durchschnitt; oder aber es kommen unter den $s+2$ Hüllen $s+1$ der Hüllen $\bar{O}_1, \ldots, \bar{O}_r$ vor; dann aber haben diese $s+1$ Hüllen einen leeren Durchschnitt nach Wahl der Mengen $O_1, \ldots, O_r$.

Damit ist insgesamt gezeigt: Die in L offenen Teilmengen $O_1, \ldots, O_{r+h}$ mit Durchmessern $\leqq \zeta$ überdecken die Menge $L_E = \psi^{-1}(\psi(L) \cdot E)$, und ihre abgeschlossenen Hüllen haben zu je $s+2$ einen leeren Durchschnitt. Dabei war E eine beliebige m-dimensionale Ebene des R_k. Also ist hiermit die Induktionsvoraussetzung auch für $n+1$ bewiesen und daher der Beweis des Hilfssatzes 2 beendet.

Hilfssatz 3. *Voraussetzungen. Es seien A ein Kompaktum, B eine abgeschlossene Teilmenge von A, g eine Einbettung von A in den R_k, f eine Einbettung von B in den R_k, $d \geqq 0$ der Abstand der Abbildungen g und f (erstere nur auf B betrachtet).*

Behauptung. Die Einbettung f läßt sich fortsetzen zu einer Einbettung f von ganz A in den R_k, die von g den Abstand d hat.

Beweis. Wir setzen f zunächst beliebig fort[13]) zu einer Einbettung f' von ganz A in den R_k. Auf $A - B$ definieren wir nun f folgendermaßen: Es sei P ein beliebiger Punkt von $A - B$ und S die (möglicherweise zu einem Punkt ausartende) Verbindungsstrecke der Punkte $g(P)$ und $f'(P)$. Hat nun S eine Länge $\leqq d$, so setzen wir $f'(P) = f(P)$. Andernfalls setzen wir $f(P)$ gleich demjenigen Punkt von S, welcher von $g(P)$ den Abstand d hat. Es ist unmittelbar klar, daß die so definierte Fortsetzung von f auf ganz A die verlangte Eigenschaft hat.

Hilfssatz 4. *Voraussetzungen. Es seien W ein achsenparalleler*[14]), *abgeschlossener, k-dimensionaler Würfel des kartesischen R_k, n eine nichtnegative, ganze rationale Zahl $< k$ und δ eine positive Zahl.*

Behauptung. Es existiert eine topologische Abbildung φ von W in den R_k und eine natürliche Zahl s mit folgenden Eigenschaften: 1. Jeder Punkt P aus W hat von seinem φ-Bild einen Abstand $< \delta$; 2. jedes höchstens n-dimensionale Simplex $< W$, für welches die Orthogonalprojektion auf die durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$ definierte Ebene F_0 eine eineindeutige Abbildung ist, wird durch φ in eine algebraische Mannigfaltigkeit abgebildet, die mit jeder $(k-n)$-dimensionalen Ebene des R_k höchstens s Punkte gemein hat.

Beweis. Es sei M eine n-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit des R_k, die mit jeder $(k-n)$-dimensionalen Ebene des R_k höchstens $s = s(M)$ Punkte gemein hat (§ 1, Nr. 7). Indem wir nötigenfalls die Mannigfaltigkeit M einer linearen Koordinatentransformation unterwerfen, dürfen wir annehmen, daß die n-dimensionale Ebene F_0 (definiert durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$) Tangentialebene von M im Punkte $x_1 = \cdots = x_k = 0$ ist und daß außerdem die Orthogonalprojektion den Durchschnitt $M \cdot W$ eineindeutig (also topologisch) in F_0 abbildet derart, daß jeder Punkt aus $M \cdot W$ von seinem Bildpunkt einen Abstand $< \delta$ hat. Dann läßt sich also $M \cdot W$ in der Form

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = n+1, \ldots, k)$$

darstellen, wo der Definitionsbereich der Funktionen φ_i der abgeschlossene, n-dimensionale Würfel $F_0 \cdot W$ ist und $\Sigma \varphi_i^2(x_1, \ldots, x_n) < \delta^2$ gilt.

Ist nun $(x_1, \ldots, x_k)$ ein beliebiger Punkt von W, so ordnen wir ihm als φ-Bild den Punkt

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} + \varphi_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_k + \varphi_k(x_1, \ldots, x_n))$$

zu und behaupten, daß die so definierte topologische Abbildung das Verlangte leistet.

Sicher hat jeder Punkt aus W von seinem φ-Bild einen Abstand $< \delta$. Weiter sei T ein n-dimensionales Simplex $< W$, welches durch die Orthogonalprojektion auf F_0 topologisch auf ein Simplex $T_0 < F_0$ abgebildet wird. Wir zeigen, daß $\varphi(T)$ mit jeder $(k-n)$-dimensionalen Ebene E des R_k höchstens s Punkte gemein hat. Die von T aufgespannte n-dimensionale Ebene F können wir in der Gestalt

$$x_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = n+1, \ldots, k)$$

schreiben, wobei ψ_i eine ganze lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ ist. Zur Untersuchung des Durchschnittes $\varphi(T) \cdot E$ unterwerfen wir den R_k der affinen Transformation ψ, welche entsteht, wenn wir jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_k)$ den Punkt

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} - \psi_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, x_k - \psi_k(x_1, \ldots, x_n))$$

zuordnen. Diese affine Transformation bildet F auf F_0, also $\varphi(T)$ auf $\varphi(T_0) < M$[15]) und die Ebene E auf eine $(k-n)$-dimensionale Ebene $\psi(E)$ ab. Da M mit $\psi(E)$ höchstens s

---

[13]) Alexandroff-Hopf, Topologie **1**, S. 76.

[14]) Achsenparallel nennen wir einen Würfel, dessen Kanten zu den Koordinatenachsen parallel sind.

[15]) Man beachte, daß $\psi\varphi = \varphi\psi$ ist, da für $i = n+1, \ldots, k$ gilt

$$(x_i + \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)) - \psi_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_i - \psi_i(x_1, \ldots, x_n)) + \varphi_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Punkte gemein hat, enthält insbesondere der Durchschnitt $D = \varphi(T_0) \cdot \psi(E)$ höchstens s Punkte. Mithin enthält auch der Durchschnitt $\psi^{-1}(D) = \psi^{-1}\varphi(T_0) \cdot E = \varphi(T) \cdot E$ [15]) höchstens s Punkte, was zu zeigen war.

Hilfssatz 5. *Voraussetzungen. Im Kompaktum A seien zwei fremde, abgeschlossene Teilmengen B und C gegeben. Weiter seien f_0 eine Einbettung von A in den R_k, und F_0 die Menge aller Einbettungen von A in den R_k, die auf B mit f_0 identisch sind. Schließlich seien F_C der vollständige Raum aller Einbettungen von C in den R_k und G_C ein in F_C dichtes $G_\delta < F_C$.*

Behauptung. Im vollständigen Raum F_0 ist ein dichtes G_δ die Menge G aller Einbettungen aus F_0, die auf C mit Einbettungen aus G_C identisch sind.

Beweis. Daß F_0 ein vollständiger, metrischer Raum ist, ergibt sich analog, wie die Tatsache, daß die Menge F aller Einbettungen von A in den R_k ein vollständiger Raum ist (vgl. § 1, Nr. 1).

Es ist $G_C = O_1 \cdot O_2, \ldots$, wo $O_1, O_2, \ldots$ in F_C dichte, offene Teilmengen von F_C sind. Es sei $\widetilde{O}_i$ die Menge aller Einbettungen aus F_0, die auf C mit Einbettungen aus $\widetilde{O}_i$ identisch sind ($i = 1, 2, \ldots$). Dann ist $G = \widetilde{O}_1 \cdot \widetilde{O}_2 \cdot \cdots$. Um zu zeigen, daß G ein in F_0 dichtes G_δ ist, genügt es also, zu beweisen, daß jede Menge $\widetilde{O}_i$ in F_0 dicht und offen ist. Wir haben also nachzuweisen: Ist O eine in F_C dichte und offene Menge und $\widetilde{O}$ die Menge aller Einbettungen aus F_0, die auf C mit Einbettungen aus O identisch sind, so ist $\widetilde{O}$ in F_0 dicht und offen. Die Offenheit von $\widetilde{O}$ ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß, wenn zwei Einbettungen aus F_C den Abstand ζ haben, die Einbettungen, nur auf C betrachtet, einen Abstand $\leqq \zeta$ haben. Um zu zeigen, daß O in F_0 dicht ist, sei f eine beliebige Einbettung aus F_0 und ζ eine beliebige positive Zahl. Die Einbettung f, nur auf C betrachtet, ist eine Einbettung aus F_C. Da O in F_C nach Voraussetzung dicht ist, existiert in O eine Einbettung f' (von C), die von f, dies nur auf C betrachtet, einen Abstand $\leqq \zeta$ hat. Wir setzen $f' = f_0$ auf der zu C fremden Menge B und setzen die hiermit auf der in A abgeschlossenen Menge $B + C$ definierte Einbettung f' nach Hilfssatz 3 fort zu einer Einbettung f' von A in den R_k, die von f einen Abstand $\leqq \zeta$ hat; sie ist in $\tilde{O}$ enthalten. Also ist $\tilde{O}$ in F_0 dicht. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

§ 3. Die Mächtigkeitsordnung.

I. Der Fall $m + n < k$.

Satz 6. *Voraussetzungen. Es seien k, m und n drei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m + n < k$; A ein n-dimensionales Kompaktum; S eine abgeschlossene Schar m-dimensionaler Ebenen des R_k; s eine nichtnegative, ganze rationale Zahl mit folgender Eigenschaft: zu jeder Reihe der Länge $s + 1$ von n-dimensionalen Ebenen des R_k existiert eine beliebig benachbarte Reihe ohne Transversale aus S.*

Behauptung. Die Menge G aller Einbettungen von A in den R_k, bei welchen A eine M-Ordnung $\leqq s$ bzgl. S hat, ist ein im vollständigen Raum F aller Einbettungen von A in den R_k dichtes G_δ.

Beweis. Wir bezeichnen für eine beliebige positive Zahl ε mit $G(\varepsilon)$ die Menge aller Einbettungen f von A in den R_k mit folgender Eigenschaft: für jede Ebene E aus S ist die Menge $f^{-1}(f(A) \cdot E)$ überdeckbar durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $< \varepsilon$.

Wir werden beweisen, daß für jedes ε die Menge $G(\varepsilon)$ in F dicht und offen ist. Nehmen wir dies als bereits bewiesen an, so ergibt sich die Behauptung des Satzes 6 folgendermaßen. Wir betrachten den Durchschnitt $D = G(1) \cdot G(\frac{1}{2}) \cdot G(\frac{1}{3}) \cdots$. Da

die Mengen $G\left(\frac{1}{j}\right)$ in F dicht und offen sind, ist D ein in F dichtes G_δ (§ 1, Nr. 2). Wir zeigen, daß D identisch ist mit der in der Behauptung des Satzes 6 definierten Menge G. Es sei nämlich einerseits g eine beliebige Einbettung aus D. Da g in $G\left(\frac{1}{j}\right)$ liegt, ist für jede Ebene E aus S die Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ überdeckbar durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $<\frac{1}{j}$. Dies gilt für jedes natürliche j. Also kann $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ höchstens s Punkte enthalten. Dies heißt aber, daß g in G liegt und daher $D<G$ gilt. Ist andererseits g eine Einbettung aus G, so enthält für jede Ebene E aus S die Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ höchstens s Punkte, ist also für jedes natürliche j überdeckbar durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $<\frac{1}{j}$. Für jedes natürliche j ist also g in $G\left(\frac{1}{j}\right)$ und daher in D enthalten. Mithin gilt auch $G<D$. Also ist $G=D$ und damit die Behauptung des Satzes 6 bewiesen.

Wir beweisen nun erstens: $G(\varepsilon)$ ist dicht in F. Und zwar zeigen wir: zu einer beliebigen Einbettung f aus F und einer beliebigen positiven Zahl δ existiert eine Einbettung g aus $G(\varepsilon)$, die von f einen Abstand $<\delta$ hat. Wir setzen $\varkappa=\mathrm{Max}\,(2n+1,k)$ und bezeichnen mit $R_\varkappa$ einen den R_k enthaltenden $\varkappa$-dimensionalen kartesischen Raum. Nun existiert zunächst eine eindeutige, stetige Abbildung φ von A in einen n-dimensionalen Komplex L des $R_\varkappa$ derart, daß φ von f einen Abstand $<\frac{\delta}{2}$ hat und für jeden Punkt P von L das φ-Urbild in A einen Durchmesser $<\varepsilon$ besitzt[16]). Für eine hinreichend kleine positive Zahl $\zeta<\frac{\delta}{2}$ hat dann auch einen Durchmesser $<\varepsilon$ das φ-Urbild jeder Teilmenge von L mit einem Durchmesser $\leqq\zeta$ (Beweis indirekt unter Ausnützung der Kompaktheit von A und L). Weiter sei π die Orthogonalprojektion von L in den R_k. Schließlich sei ψ die Abbildung des Hilfssatzes 1. Wir setzen $\psi\varphi=g$ und behaupten, daß g von f einen Abstand $<\delta$ hat und in $G(\varepsilon)$ enthalten ist. Da φ von f einen Abstand $<\frac{\delta}{2}$ hat, $f(A)$ in R_k enthalten und π die Projektion von $L<\varphi(A)$ in den R_k ist, hat $\pi\varphi$ von f einen Abstand $<\frac{\delta}{2}$; nach Hilfssatz 1 hat π von ψ einen Abstand $<\zeta<\frac{\delta}{2}$; mithin hat $g=\psi\varphi$ von f einen Abstand $<\delta$, wie behauptet. Zum Beweis dafür, daß g in $G(\varepsilon)$ enthalten ist, wählen wir in S eine beliebige Ebene E aus. Nach Hilfssatz 1 ist die Menge $\psi^{-1}(\psi(L)\cdot E)<L$ überdeckbar durch s in L offene Teilmengen $L_1,\ldots,L_s$ von L mit Durchmessern $\leqq\zeta$. Nach Definition von ζ haben dann die in A offenen Teilmengen $O_1=\varphi^{-1}(L_1),\ldots,O_s=\varphi^{-1}(L_s)$ von A Durchmesser $<\varepsilon$. Die Summe dieser Mengen $O_1,\ldots,O_s$ enthält die Menge $\varphi^{-1}\psi^{-1}(\psi(L)\cdot E)=\varphi^{-1}\psi^{-1}(\psi\varphi(A)\cdot E)=g^{-1}(g(A)\cdot E)$. Für jede Ebene E aus S kann also die Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ überdeckt werden durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $<\varepsilon$, d. h. g ist in $G(\varepsilon)$ enthalten.

Wir behaupten zweitens: $G(\varepsilon)$ ist offen in F. Zum Beweis sei g eine beliebige Einbettung aus $G(\varepsilon)$. Wir zeigen, daß alle zu g hinreichend benachbarten Einbettungen aus F in $G(\varepsilon)$ enthalten sind. Es sei E eine Ebene der Schar S. Dann ist die Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ überdeckbar durch s in A offene Teilmengen $O_1,\ldots,O_s$ von A mit Durchmessern $<\varepsilon$. Konvergiert nun eine Folge $f_1,f_2,\ldots$ von Einbettungen aus F gegen g

[16]) Vgl. die in Fußnote [7]) genannte Arbeit, S. 758; man ersetze dort $2n+1$ durch k.

(im Sinne der Metrik in F), so ist der Limes superior der Folge der Mengen $f_i^{-1}(f_i(A)\cdot E)$ enthalten in der Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$. Denn ist P ein beliebiger Punkt dieses Limes superior, so ist P Häufungspunkt einer Folge von Punkten P_i aus $f_i^{-1}(f_i(A)\cdot E)$. Dann ist $f_i(P_i)$ in E enthalten. Also liegt auch jeder Häufungspunkt der Folge der $f_i(P_i)$ in E. Wegen $\lim f_i = g$ haben die beiden Folgen $f_1(P_1), f_2(P_2), \ldots$ und $g(P_1), g(P_2), \ldots$ dieselben Häufungspunkte. Einer dieser Häufungspunkte ist $g(P)$, da P ein Häufungspunkt der Folge $P_1, P_2, \ldots$ und g stetig ist. Also ist $g(P)$ in E, mithin P in $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ und daher der in Rede stehende Limes superior in der Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ enthalten, wie wir behauptet hatten. — Aus dem soeben Bewiesenen ergibt sich, daß für jedes hinreichend große i die Menge $f_i^{-1}(f_i(A)\cdot E)$ durch die in A offenen Mengen $O_1, \ldots, O_s < A$ überdeckt wird. Mithin existiert eine positive Zahl δ mit folgender Eigenschaft: für jede Einbettung f aus F, die von g einen Abstand $< \delta$ hat, ist die Menge $f^{-1}(f(A)\cdot E)$ überdeckbar durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $< \varepsilon$. Wir bezeichnen mit $d(E) = d(E, g, \varepsilon)$ die obere Grenze aller positiven Zahlen δ mit dieser Eigenschaft.

Der Abstand ϱ der Mengen E und $g(A)$ voneinander ist $\leqq d(E)$; denn ist $\varrho = 0$, so ist wegen $d(E) > 0$ nichts zu beweisen; ist aber $\varrho > 0$, so ist für jede Einbettung f aus F, die von g einen Abstand $< \varrho$ hat, $f(A)$ zu E fremd, also $f^{-1}(f(A)\cdot E)$ leer und daher überdeckbar durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $< \varepsilon$; mithin ist ϱ eine der Zahlen δ, von denen soeben die Rede war und für welche $d(E)$ die obere Grenze ist; also ist auch in diesem Fall $\varrho \leqq d(E)$, wie behauptet. Wir zeigen nun: Die untere Grenze $d = d(g, \varepsilon)$ aller Zahlen $d(E)$, wobei E alle Ebenen aus S durchläuft, ist positiv. Wir nehmen per absurdum an, dies wäre falsch. Dann existiert also eine Folge von Ebenen $E_1, E_2, \ldots$ mit $\lim d(E_i) = 0$. Da nach dem soeben Gezeigten die Ebene E_i von der Menge $g(A)$ einen Abstand $\leqq d(E_i)$ hat und $g(A)$ beschränkt ist, so können wir, indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, von vornherein annehmen, daß $d(E_1), d(E_2), \ldots$ endlich sind und die Folge der Ebenen $E_1, E_2, \ldots$ gegen eine (wegen der Abgeschlossenheit von S) in S enthaltene Ebene E konvergiert. Nach Definition von $d(E_i)$ existiert für jedes $i = 1, 2, \ldots$ eine Einbettung f_i aus F derart, daß f_i von g einen Abstand $< 2d(E_i)$ hat und die Menge $f_i^{-1}(f_i(A)\cdot E_i)$ nicht überdeckbar ist durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $< \varepsilon$. Nun ist der Limes superior der Folge der Mengen $f_i^{-1}(f_i(A)\cdot E_i)$ enthalten in der Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ (Beweis analog wie vorhin). Da g in $G(\varepsilon)$ liegt, kann die Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $< \varepsilon$ überdeckt werden. Diese offenen Mengen aber würden für ein hinreichend großes i auch die Menge $f_i^{-1}(f_i(A)\cdot E_i)$ überdecken, im Widerspruch zur Wahl von f_i. Unsere Annahme, es wäre $d = 0$, ist also falsch, d. h. es ist $d > 0$ wie behauptet.

Dies bedeutet aber: Für jede Ebene E aus S und jede Einbettung f aus F, die von g einen Abstand $< d$ hat, ist die Menge $f^{-1}(f(A)\cdot E)$ überdeckbar durch s in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $< \varepsilon$, d. h. die Menge $G(\varepsilon)$ ist offen in F, wie wir behauptet hatten.

Satz 7. *Voraussetzungen. Es seien k, m und n drei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m + n < k$; A ein n-dimensionales, in sich dichtes Kompaktum; S eine abgeschlossene Vollschar m-dimensionaler Ebenen des R_k; s eine natürliche Zahl*

$$> \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n} - 1.$$

Behauptung. Die Menge G aller Einbettungen von A in den R_k, bei welchen A die total homogene M-Ordnung s bzgl. S hat, ist dicht im vollständigen Raum F aller Einbettungen von A in den R_k [17]).

Beweis. Wir werden eine Einbettung g aus G konstruieren. Wir werden g gewinnen als Limes einer konvergenten Folge von Einbettungen g_i ($i = 1, 2, \ldots$), zu welcher eine Folge von s-punktigen Mengen Q_i aus A und eine Folge von Ebenen E_i aus S ($i = 1, 2, \ldots$) existiert derart, daß für $j = 1, \ldots, i$ das Bild $g_i(Q_j)$ in der Ebene E_j enthalten ist. Dann liegt für jedes $j = 1, 2, \ldots$ die Menge $g(Q_j)$ in der Ebene E_j. Wir werden dafür sorgen, daß einerseits in jeder Umgebung jedes Punktes von A eine solche s-punktige Menge Q_i enthalten ist und daß andererseits A bei der Einbettung g höchstens die M-Ordnung s bzgl. S hat (im letzteren liegt die wesentliche Schwierigkeit des Beweises). Dann hat A bei g die total homogene M-Ordnung s bzgl. S. — Wir führen diesen Gedankengang durch.

Wir wählen zunächst eine in A dichte, aus abzählbar vielen Punkten $P_1, P_2, \ldots$ bestehende Teilmenge von A und eine positive Zahl ε. Weiter bezeichnen wir mit G_0 die Menge aller Einbettungen von A in den R_k, bei welchen A eine M-Ordnung $\leqq s$ hat bzgl. der Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k. Diese Menge G_0 ist ein in F dichtes G_δ (Satz 6; denn nach Satz 1 erfüllt die Zahl s wegen $s + 1 > \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n}$ die s betreffende Voraussetzung des Satzes 6). Wir können also G_0 darstellen als Durchschnitt $O_1 \cdot O_2 \cdots$ einer Folge von in F dichten, offenen Teilmengen $O_1, O_2, \ldots$ von F mit $O_1 > O_2 > \cdots$. Es sei g_0 eine Einbettung aus G_0.

Wir konstruieren weiter unten für jedes natürliche i erstens eine positive Zahl δ_i, zweitens eine genau s Punkte enthaltende Teilmenge Q_i von A, drittens eine Ebene E_i aus S, viertens eine Einbettung g_i aus G_0 von A in den R_k, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

a_i) δ_i ist höchstens gleich dem Abstand von g_{i-1} und $F - O_i$;

b_i) Q_i ist enthalten in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von P_i;

c_i) $g_i(Q_j)$ ist enthalten in E_j ($j = 1, \ldots, i$);

d_i) g_{i-1} und g_i haben einen Abstand $< \mathrm{Min}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\delta_1}{2^{i+1}}, \frac{\delta_2}{2^i}, \ldots, \frac{\delta_i}{2^2}\right)$.

Nehmen wir diese Konstruktion zunächst als bereits durchgeführt an. Dann konvergieren wegen d_i) die Einbettungen g_i ($i = 1, 2, \ldots$) gegen eine Einbettung g aus F, die von der Einbettung g_0 einen Abstand $< \varepsilon$ hat. Wegen c_i) liegt für jedes $j = 1, 2, \ldots$ die Menge $g(Q_j)$ in der Ebene E_j aus S; da weiter wegen b_i) und der Dichtigkeit der Menge der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ in A in jeder Umgebung jedes Punktes von A eine der s-punktigen Mengen Q_j enthalten ist, so hat also jede offene Teilmenge von A bei der Einbettung g in den R_k eine M-Ordnung $\geqq s$ bzgl. S. Andererseits hat A bei g eine M-Ordnung $\leqq s$ bzgl. S, da g_{i-1} in G_0, also in $O_i > G_0$ enthalten, also g wegen a_i) und d_i) in O_i ($i = 1, 2, \ldots$) und daher in $G_0 = O_1 \cdot O_2 \cdot \ldots$ enthalten ist. Also hat A bei der Einbettung g die total homogene M-Ordnung s bzgl. S. — Da g von der in G_0 beliebig gewählten Einbettung g_0 einen Abstand $< \varepsilon$ hat, wobei ε eine beliebig gewählte positive Zahl ist, und G_0 in F

---

[17]) Genügt die Zahl $s = 1$ der Bedingung $s > \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n} - 1$, so benötigen wir die Voraussetzung, daß A in sich dicht ist, nicht; denn wenn S eine abgeschlossene Vollschar ist, so hat A bei jeder Einbettung aus der G_δ-Menge G des Satzes 6 für $s = 1$ die M-Ordnung 1 bezüglich S; diese Ordnung ist natürlich total homogen. — Im Falle $s \geqq 2$ ist die Bedingung, daß A in sich dicht sei, offenbar auch notwendig dafür, daß A bei irgendeiner Einbettung die total homogene M-Ordnung s hat.

dicht ist, so ist also die Menge der Einbettungen, bei welchen A die total homogene M-Ordnung s bzgl. S hat, in F dicht. Damit ist der Satz 7 bewiesen.

Wir beginnen jetzt die Konstruktion der Folge der positiven Zahlen δ_i, der s-punktigen Mengen Q_i, der Ebenen E_i aus S und der Einbettungen g_i aus G_0 durch vollständige Induktion nach i. Um diese Induktion durchzuführen, fügen wir zu den Bedingungen $\mathrm{a}_i) - \mathrm{d}_i)$ noch folgende hinzu:

$\mathrm{e}_i)$ je $m+1$ Punkte der Menge $Q_1 + \cdots + Q_i$ werden durch g_i auf $m+1$ linear unabhängige Punkte des R_k abgebildet und jede m-dimensionale Ebene des R_k enthält höchstens s Punkte von $g_i(Q_1 + \cdots + Q_i)$.

Es liegt bereits die Einbettung g_0 aus G_0 vor (sie wurde in G_0 beliebig gewählt). Wir machen folgende Induktionsvoraussetzung: Für irgendein natürliches i liegen bereits Einbettungen $g_0, \ldots, g_{i-1}$ aus G_0 vor; falls $i > 1$ ist, liegt außerdem für jedes $j = 1, \ldots, i-1$ eine positive Zahl δ_j, eine s-punktige Menge $Q_j < A$ und eine Ebene E_j aus S vor derart, daß $\mathrm{a}_j) - \mathrm{e}_j)$ erfüllt sind $(j = 1, \ldots, i-1)$. Wir konstruieren nun nacheinander eine positive Zahl δ_i, eine s-punktige Menge $Q_i < A$, eine Ebene E_i aus S und eine Einbettung g_i aus G_0 derart, daß $\mathrm{a}_i) - \mathrm{e}_i)$ erfüllt sind; dabei besteht die Hauptschwierigkeit darin, zu erreichen, daß g_i in G_0 liegt.

1. Definition von δ_i. Da g_{i-1} in G_0 enthalten ist, liegt g_{i-1} auch in der in F offenen Menge $O_i > G_0$ und hat daher vom Komplement $F - O_i$ einen positiven Abstand (worunter wir im Falle $F - O_i = 0$ die Zahl $+\infty$ verstehen wollen). Es sei nun δ_i eine beliebige positive Zahl, welche der Bedingung $\mathrm{a}_i)$ genügt.

2. Definition von Q_i. Zunächst sei Δ_i eine positive Zahl, welche der Bedingung

$$\Delta_i < \frac{1}{3} \operatorname{Min}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\delta_1}{2^{i+1}}, \frac{\delta_2}{2^i}, \ldots, \frac{\delta_i}{2^2}\right) \tag{1}$$

genügt. Da A in sich dicht ist nach Voraussetzung unseres Satzes, können wir eine s-punktige (im Falle $i > 1$ zu der endlichen Menge $Q_1 + \cdots + Q_{i-1}$ fremde) Menge Q_i in einer so kleinen Umgebung bzgl. A des Punktes P_i wählen, daß erstens jeder Punkt aus Q_i von P_i einen Abstand $< \frac{1}{i}$ hat (so daß also $\mathrm{b}_i)$ erfüllt ist), und daß zweitens folgendes gilt:

(2) $g_{i-1}(Q_i)$ ist in der Δ_i-Umgebung von $g_{i-1}(P_i)$ enthalten.

3. Definition von E_i. Da S eine Vollschar ist, existiert in S eine Ebene E_i derart, daß erstens gilt:

(3) der Punkt $g_{i-1}(P_i)$ hat von E_i einen Abstand $< \Delta_i$,

und daß zweitens im Falle $i > 1$ die Ebene E_i verschieden ist von den Ebenen $E_1, \ldots, E_{i-1}$.

4. Konstruktion von g_i. Wir definieren zunächst eine i. a. nicht in G_0 enthaltene Hilfseinbettung f_i aus F folgendermaßen. Zunächst setzen wir $f_i = g_{i-1}$ auf $Q_1 + \cdots + Q_{i-1}$, wofern diese Menge bereits definiert, d. h. wofern $i > 1$ ist. Sodann suchen wir für jeden Punkt P der Menge Q_i (die nach ihrer Konstruktion im Falle $i > 1$ zu $Q_1 + \cdots + Q_{i-1}$ fremd ist) den Projektionspunkt des Bildes $g_{i-1}(P)$ in der Ebene E_i auf und bezeichnen mit $f_i(P)$ einen in beliebiger Nähe dieses Projektionspunktes liegenden Punkt von E_i, über den wir jedoch sogleich noch näher verfügen. Dann gilt zunächst (man beachte c_{i-1})

$\bar{\mathrm{c}}_i)$ die Menge $f_i(Q_j)$ ist enthalten in der Ebene E_j $(j = 1, \ldots, i)$.

Indem wir die Punkte $f_i(P)$ in E_i sofort „in allgemeiner Lage" wählen, können wir wegen $\mathrm{c}_{i-1})$ außerdem mühelos erreichen, daß folgendes gilt:

$\bar{e}_i$) je $m+1$ Punkte der Menge $Q_1+\cdots+Q_i$ werden durch f_i auf $m+1$ linear unabhängige Punkte des R_k abgebildet und jede m-dimensionale Ebene des R_k enthält höchstens s Punkte der Menge $f_i(Q_1+\cdots+Q_i)$.

Nach (2) und (3) hat jeder Punkt $g_{i-1}(P)$ (wobei P ein Punkt aus Q_i ist) von der Ebene E_i und daher von dem vorstehend benutzten Projektionspunkt einen Abstand $<2\Delta_i$. Wir wählen den Punkt $f_i(P)$ sofort so nahe bei diesem Projektionspunkt (unbeschadet der Bedingungen $\bar{c}_i$) und $\bar{e}_i$)), daß auch $f_i(P)$ von $g_{i-1}(P)$ einen Abstand $<2\Delta_i$ hat. Es sei $d<2\Delta_i$ das Maximum der Abstände der Punkte $f_i(P)$ und $g_{i-1}(P)$, wobei P die Menge Q_i durchläuft. Dann können wir nach Hilfssatz 3 die zunächst nur auf der Menge $Q_1+\cdots+Q_i$ definierte Einbettung zu einer Einbettung f_i von ganz A in den R_k fortsetzen, die von g_{i-1} den Abstand d hat. Dann gilt:

$\bar{d}_i$) $\quad g_{i-1}$ und f_i haben einen Abstand $<2\Delta_i$.

Hat nun zufällig A bei der Einbettung f_i eine M-Ordnung $\leqq s$ bzgl. der Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k, liegt also f_i in G_0, so setzen wir $f_i=g_i$. Andernfalls zeigen wir sogleich die Existenz einer Einbettung g_i in G_0, die von f_i einen Abstand $<\Delta_i$ hat und auf der Menge $Q=Q_1+\cdots+Q_i$ mit f_i identisch ist. In beiden Fällen folgt aus $\bar{c}_i$) die Gültigkeit von c_i), aus (1) und $\bar{d}_i$) die Gültigkeit von d_i), schließlich aus $\bar{e}_i$) die Gültigkeit von e_i).

Fügt man die hiermit definierte Zahl δ_i, Menge Q_i, Ebene E_i und Einbettung g_i zu den nach Induktionsvoraussetzung bereits vorliegenden Zahlen $\delta_1,\ldots,\delta_{i-1}$, Mengen $Q_1,\ldots,Q_{i-1}$, Ebenen $E_1,\ldots,E_{i-1}$ und Einbettungen $g_0,g_1,\ldots,g_{i-1}$ hinzu (im Fall $i=1$ liegt nur g_0 vor), so ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt, wenn man darin i durch $i+1$ ersetzt.

Wir haben jetzt nur noch die Existenz einer auf $Q=Q_1+\cdots+Q_i$ mit f_i identischen Einbettung g_i in G_0 mit einem Abstand $<\Delta_i$ von f_i zu beweisen.

Wir bezeichnen mit A^h die (kompakte) Menge aller Punkte von A, die von der endlichen Menge Q Abstände $\geqq\frac{1}{h}$ haben ($h=1,2,\ldots$). Dann gilt $A^1<A^2<\ldots$ und $A=Q+A^1+A^2+\cdots$. Es sei weiter $F_i<F$ der vollständige Raum aller auf Q mit f_i identischen Einbettungen von A in den R_k. Dann ist ein in F_i dichtes G_δ die Menge G_i^h aller auf Q mit f_i identischen Einbettungen von A, bei welchen A^h eine M-Ordnung $\leqq s$ hat bzgl. der Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k. Dies ergibt sich aus dem Hilfssatz 5, wenn man darin $B=Q$ setzt, $C=A^h$, $f_0=f_i$, $F_0=F_i$, F_C gleich dem vollständigen Raum F^h aller Einbettungen von A^h in den R_k, $G=G_i^h$, G_C gleich der Menge aller Einbettungen aus F^h, bei welchen A^h eine M-Ordnung $\leqq s$ hat bzgl. der Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k (diese Menge G_C ist ein in F^h dichtes G_δ nach Satz 6; denn nach Satz 1 genügt wegen $s>\frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n}-1$ die Zahl s der s betreffenden Voraussetzung des Satzes 6).

Weiter seien $E_\mu^1,\ldots,E_\mu^{l_\mu}$ die endlich vielen μ-dimensionalen Ebenen des R_k, welche durch die in der Menge $f_i(Q)$ enthaltenen, nach $\bar{e}_i$) linear unabhänggien $(\mu+1)$-Tupel von Punkten aufgespannt werden ($\mu=1,\ldots,m$). Dann ist die Schar S_μ^λ ($\lambda=1,\ldots,l_\mu$) aller m-dimensionalen Ebenen des R_k, welche die Ebene E_μ^λ enthalten, algebraisch und an jeder Stelle von der Dimension $(m-\mu)(k-m)$. Also ist die Menge $G_\mu^{\lambda h}$ aller Einbettungen der kompakten Menge A^h in den R_k, bei welchen A^h eine M-Ordnung $\leqq\frac{(m-\mu)(k-m)}{k-m-n}$

bzgl. der Schar S_μ^λ hat, ein im vollständigen Raum F^h aller Einbettungen von A^h in den R_k dichtes G_δ (Satz 1 a und 6).

Die Menge $G_{\mu i}^{\lambda h}$ aller Einbettungen aus F_i, die auf A^h mit Einbettungen aus $G_\mu^{\lambda h}$ identisch sind, ist ein in F_i dichtes G_δ (Hilfssatz 5; man setze darin $B = Q$, $C = A^h$, $f_0 = f_i$, $F_0 = F_i$, $F_C = F^h$, $G_C = G_\mu^{\lambda h}$, $G = G_{\mu i}^{\lambda h}$).

Der Durchschnitt $G_i = \prod_h G_i^h \cdot \prod_{\lambda \mu h} G_{\mu i}^{\lambda h}$ ist ein im vollständigen Raum F_i dichtes G_δ als Durchschnitt abzählbar vieler in F_i dichter G_δ-Mengen (§ 1, Nr. 2). Also enthält G_i eine Einbettung g_i, die von f_i einen Abstand $< \Delta_i$ hat. g_i ist als Einbettung aus F_i mit f_i identisch auf der Menge Q. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß G_i und damit g_i in G_0 enthalten ist. Dies tun wir jetzt.

Es sei g eine beliebige Einbettung aus G_0 und E eine beliebige m-dimensionale Ebene des R_k. Es ist zu beweisen, daß die Menge $g^{-1}(g(A) \cdot E)$ aller durch g in die Ebene E abgebildeten Punkte von A höchstens s Punkte enthält. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall. E ist zu $g(Q)$ fremd. Dann ist wegen $A - Q = A^1 + A^2 + \cdots$ die Menge $g^{-1}(g(A) \cdot E)$ für ein hinreichend großes h identisch mit der Menge $A^h \cdot g^{-1}(g(A) \cdot E)$ aller durch g in E abgebildeten Punkte der Menge A^h. Diese Menge enthält aber höchstens s Punkte, da G_i und damit g enthalten ist in der Menge G_i^h aller Einbettungen aus F_i, bei welchen A^h eine M-Ordnung $\leqq s$ hat bzgl. der Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k.

2. Fall. E ist zu $g(Q)$ nicht fremd. Es sei $\mu + 1$ die Maximalzahl linear unabhängiger Punkte aus $g(Q) \cdot E$ (es ist $\mu \leqq m$, da E die Dimension m hat) und E_μ^λ die durch solch ein unabhängiges $(\mu + 1)$-Tupel aus $g(Q) \cdot E$ aufgespannte μ-dimensionale Ebene; diese Ebene E_μ^λ enthält die Menge $g(Q) \cdot E$ und ist in E enthalten. Die Ebene E ist eine Ebene der Schar S_μ^λ aller E_μ^λ enthaltenden m-dimensionalen Ebenen des R_k. Nun ist die Einbettung g für jedes $h = 1, 2, \ldots$ enthalten in $G_{\mu i}^{\lambda h}$ und daher in $G_\mu^{\lambda h}$, d. h. die Menge A^h hat bei der Einbettung g eine M-Ordnung $\leqq \frac{(m-\mu)(k-m)}{k-m-n}$ bzgl. der Schar S_μ^λ. Da dies für jedes $h = 1, 2, \ldots$ gilt, so hat wegen $A^1 < A^2 < \cdots$ die Menge $A^1 + A^2 + \cdots$ bei der Einbettung g eine M-Ordnung $\leqq \frac{(m-\mu)(k-m)}{k-m-n}$ bzgl. der Schar S_μ^λ. Insbesondere werden also bei der Einbettung g höchstens $\frac{(m-\mu)(k-m)}{k-m-n}$ Punkte der Menge $A^1 + A^2 + \cdots = A - Q$ in die Ebene E abgebildet. Wir unterscheiden nun noch zwei Unterfälle: a) Es ist $\mu = m$. Dann ist $\frac{(m-\mu)(k-m)}{k-m-n} = 0$, d. h. $g(A - Q)$ ist zu E fremd. Es werden also höchstens Punkte von Q durch g in E abgebildet. Nun ist g als Einbettung aus F_i auf Q mit f_i identisch. Also werden wegen $\bar{e}_i$) und $Q = Q_1 + \cdots + Q_i$ höchstens s Punkte von Q und damit von A durch g in die Ebene E abgebildet. b) Es ist $\mu < m$. Wegen $\bar{e}_i$) und der Identität von g mit f_i auf Q werden durch g je $m + 1$ Punkte von Q auf $m + 1$ linear unabhängige Punkte abgebildet. Also folgt aus der Definition der Zahl μ und der Ungleichung $\mu < m$, daß die Anzahl der Punkte von Q, die durch g in E abgebildet werden, gleich $\mu + 1$ ist. Wie wir bereits wissen, werden höchstens $\frac{(m-\mu)(k-m)}{k-m-n}$ Punkte von $A^1 + A^2 + \cdots$ durch g in E abgebildet. Also ist die Anzahl der Punkte von $A = Q + A^1 + A^2 + \cdots$, die durch g in E abgebildet

werden, höchstens gleich $\mu + 1 + \frac{(m-\mu)(k-m)}{k-m-n}$. Diese letztere Summe ist aber $\leqq \frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n}$, also $< s+1$, da $\frac{(m+1)(k-m)}{k-m-n} - 1 < s$ ist nach Voraussetzung unseres Satzes. — In allen Fällen also werden höchstens s Punkte von A durch g in E abgebildet, w. z. b. w.

Damit ist der Beweis des Satzes 6 beendet.

II. Der Fall $m + n = k$.

Satz 8. *Voraussetzungen. Es seien k eine natürliche Zahl; m und n zwei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m + n = k$; A ein n-dimensionales Kompaktum, das einem Komplex eines kartesischen Raumes homöomorph ist.*

Behauptung. Die Menge G aller Einbettungen von A in den R_k, bei welchen A eine beschränkte M-Ordnung hat bzgl. der Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k, ist dicht im vollständigen Raum F aller Einbettungen von A in den R_k.

Beweis. Wir nehmen A sogleich als einen Komplex des kartesischen R_{2n+1} an. Weiter sei f eine beliebige Einbettung aus F und ε eine positive Zahl. Wir zeigen die Existenz einer Einbettung g aus G, die von f einen Abstand $< \varepsilon$ hat.

Mit A ist auch $f(A)$ kompakt, also beschränkt. Es existiert also ein achsenparalleler, k-dimensionaler Würfel W des R_k mit dem Mittelpunkt im Ursprung des R_k, welcher $f(A)$ im Innern enthält. Wir definieren nun eine simpliziale Einbettung h von A in den R_k folgendermaßen: Ist Q eine Ecke von A, so ordnen wir Q den Punkt $f(Q)$ als Bild $h(Q)$ zu. Hierbei können und wollen wir die Triangulierung des Komplexes A von vornherein so fein annehmen, daß die soeben definierte simpliziale Einbettung h von f einen Abstand hat, welcher kleiner ist als $\frac{\varepsilon}{2}$. Wegen der Konvexität von W ist $h(A)$ im Innern von W enthalten. Diese Eigenschaften von h bleiben erhalten, wenn wir h hinreichend wenig dadurch abändern, daß wir die Bilder $h(Q)$ der Ecken Q von A hinreichend wenig verrücken. Und zwar verrücken wir die Bilder $h(Q)$ so, daß erstens jedes Simplex von A auf ein gleichdimensionales Simplex von $h(A)$ (topologisch) abgebildet wird und daß zweitens für jedes Simplex von $h(A)$ die Orthogonalprojektion auf die durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$ definierte, n-dimensionale Ebene F_0 eine eineindeutige, also topologische Abbildung ist (kurz: wir bringen die Simplexe von $h(A)$ „in allgemeine Lage"). Es sei nun φ die Abbildung des Hilfssatzes 4, wobei wir $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ setzen. Dann ist $g = \varphi h$ eine Einbettung von A in den R_k, welche das Verlangte leistet. Denn da h von f einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{2}$ und da jeder Punkt des Würfels W, insbesondere also jeder Punkt des Bildes $h(A)$ von seinem φ-Bild einen Abstand $< \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ hat, so hat g von f einen Abstand $< \varepsilon$. Da weiter jedes Simplex von $h(A)$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 genügt, so hat für jedes Simplex von A das g-Bild mit jeder m-dimensionalen Ebene E höchstens s Punkte gemein. Ist also A Summe von t Simplexen, so liegen für höchstens $s \cdot t$ Punkte von A die g-Bilder in einer m-dimensionalen Ebene des R_k. Damit ist der Satz 8 bewiesen.

Satz 9. *Voraussetzungen. Es seien k eine natürliche Zahl, m und n zwei nichtnegative, ganze rationale Zahlen mit $m + n = k$; A ein n-dimensionales Kompaktum; S die Schar aller m-dimensionalen Ebenen des R_k.*

Behauptung. Damit eine Einbettung g von A in den R_k und eine in S offene und dichte Teilschar S' von S existiere derart, daß A bei der Einbettung g von endlicher M-Ordnung bzgl. S' sei und die D-Ordnung 0 bzgl. $S - S'$ habe, ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend: „A ist darstellbar als Summe einer in A offenen, höchstens $(n-1)$-dimensionalen Menge A''' und der (in A) abgeschlossenen Hülle A'' einer Summe von endlich oder abzählbar unendlich vielen paarweise fremden, in A'' offenen n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$ mit höchstens $(n-1)$-dimensionalem $A' = A'' - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$.

Zusatz. Ist die vorstehende Bedingung erfüllt, so gilt sogar Folgendes: Im Raum F aller Einbettungen f von A in den R_k liegt dicht die Menge G aller Einbettungen g von A in den R_k mit folgender Eigenschaft: es bezeichne S' die in S offene und dichte Teilschar von S, bestehend aus allen zu $g(A')$ fremden Ebenen aus S; dann besteht die Menge $g^{-1}(g(A)\cdot E)$ für jede Ebene E von S' aus höchstens endlich vielen Punkten, hingegen für jede Ebene E von $S - S'$ aus höchstens abzählbar vielen Punkten mit höchstens $(m+1)(k-m)$ Häufungspunkten (diese Häufungspunkte sind in A' enthalten).

Beweis. A. Wir zeigen zuerst die Notwendigkeit der Bedingung.

Es ist bereits das folgende Ergebnis bekannt [18]): Es sei A ein n-dimensionales Kompaktum; es existiere eine Einbettung h von A in den R_n derart, daß die Urbildmenge $h^{-1}(P)$ für jeden Punkt P von $h(A)$ nur endlich viele Punkte enthält, abgesehen höchstens von den Punkten P einer nirgends dichten Teilmenge von $h(A)$, für welche $h^{-1}(P)$ nulldimensional ist; dann erfüllt A die in der obigen Behauptung ausgesprochene Bedingung.

Auf dieses Ergebnis wollen wir unsere Behauptung der Notwendigkeit der obigen Bedingung zurückführen.

Es sei also g eine Einbettung von A in den R_k und S' eine in S offene und dichte Teilschar von S derart, daß A bei g von endlicher M-Ordnung bzgl. S' ist und die D-Ordnung 0 bzgl. $S - S'$ hat. Wir konstruieren zunächst eine volle Parallelschar P_0 m-dimensionaler Ebenen des R_k derart, daß A bei g von endlicher M-Ordnung ist bzgl. einer in P_0 offenen und dichten Teilschar P' von P_0, während A bei g die D-Ordnung 0 bzgl. $\mathsf{P}_0 - \mathsf{P}'$ hat.

Es sei Φ der irgendwie metrisierte [19]), vollständige Raum aller orthogonalen Transformationen φ des R_k in sich. Weiter sei P eine volle Parallelschar m-dimensionaler Ebenen des R_k und $E_1, E_2, \ldots$ eine in P dichte Folge von Ebenen aus P. Da S' in S offen und dicht ist, existiert für jedes natürliche i und für jede Transformation φ aus Φ ein zu φ beliebig benachbartes φ' aus φ derart, daß $\varphi'(E_i)$ in S' liegt. Dann liegt auch für jedes zu φ' hinreichend benachbarte φ'' aus Φ ebenfalls $\varphi''(E_i)$ in S'. Also ist für jedes natürliche i die Menge Φ_i aller orthogonalen Transformationen φ, welche E_i in Ebenen $\varphi(E_i)$ von S' überführen, offen und dicht im vollständigen Raum Φ aller orthogonalen Transformationen des R_k. Der Durchschnitt $\Phi_0 = \prod_{i=1}^{\infty} \Phi_i$ ist also in Φ dicht (§ 1, Nr. 2), insbesondere also nicht leer. Es sei φ_0 eine Transformation aus Φ_0. Da φ_0 für jedes natürliche i in Φ_i liegt, sind die Ebenen $\varphi_0(E_1), \varphi_0(E_2), \ldots$ sämtlich in S' enthalten. Mithin ist, da die Menge der Ebenen $E_1, E_2, \ldots$ in der Parallelschar P dicht liegt, der Durchschnitt P'_0 der Parallelschar $\mathsf{P}_0 = \varphi_0(\mathsf{P})$ mit S' (offen und) dicht in P_0.

---

[18]) G. Nöbeling, Topologische Struktur der Mengen endlicher Ordnung, Journal f. d. reine u. angew. Mathematik **180** (1939), 129—140.

[19]) Sind z. B. $x'_i = a_{i0} + \sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j$ und $x''_{ij} = b_{i0} + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_j$ zwei orthogonale Transformationen, so können wir als Abstand derselben die Zahl $\sqrt{\sum_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=0,1,\ldots,k}} (a_{ij} - b_{ij})^2}$ einführen.

Nach Voraussetzung über g ist also A bei g von endlicher M-Ordnung bzgl. P_0' und von der D-Ordnung 0 bzgl. $\mathsf{P}_0 - \mathsf{P}_0'$. Ist nun π die Orthogonalprojektion auf einen zu den Ebenen der Parallelschar P_0 senkrechten Teil-R_n des R_k, so genügt die Einbettung $h = \pi g$ von A in den R_n den Voraussetzungen des eingangs formulierten Ergebnisses; denn ein beliebiger Punkt P des R_n hat eine höchstens endliche bzw. höchstens nulldimensionale Urbildmenge $h^{-1}(P)$ in A, je nachdem P enthalten ist in einer Ebene aus P_0' oder nicht. Also hat A die in der Behauptung des Satzes 9 formulierte Struktur.

B. Wir zeigen nun, daß die im Satz 9 ausgesprochene Bedingung hinreichend ist, und zwar beweisen wir sogleich den schärferen Zusatz. Es sei also die im Satz 9 ausgesprochene Bedingung erfüllt; weiter sei f eine beliebige Einbettung aus F und ε eine positive Zahl. Wir wollen eine der Behauptung des Zusatzes zu Satz 9 genügende Einbettung g konstruieren, welche von f einen Abstand $< \varepsilon$ hat. Diese Konstruktion geht in drei Schritten vor sich, indem wir die Einbettung g nacheinander auf den Mengen A', A'' und A''' definieren.

1. *Schritt.* Definition von g auf A'. Wir wollen eine Einbettung g von A' in den R_k definieren mit folgenden Eigenschaften:

a′) g hat von f auf A' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$;

b′) A' hat bei g eine M-Ordnung $\leqq (m+1)(k-m)$ bzgl. S.

Aus der Voraussetzung $m + n = k$ des Satzes 9 folgt die Gleichung

$$k - m - (n-1) = 1.$$

Daher genügt nach Satz 1 (mit $n-1$ statt n) die Zahl $s = (m+1)(k-m)$ der in den Voraussetzungen des Satzes 6 (mit $n-1$ statt n) an s gestellten Forderung. Nach Satz 6 (mit $n-1$ statt n) ist also die Menge H^* aller Einbettunegn von A' in den R_k, bei welchen A' eine M-Ordnung $\leqq (m+1)(k-m)$ bzgl. S hat, ein dichtes G_δ im Raum H aller Einbettungen von A' in den R_k.

Weiter sei $E_1, E_2, \ldots$ eine in S dichte Folge von Ebenen aus S. Wir betrachten die Menge H_i aller Einbettungen h aus H, für welche $h(A')$ zu E_i nicht fremd ist. Erstens ist H_i in H abgeschlossen, wie sofort aus der Kompaktheit von A' folgt. Zweitens ist H_i in H nirgends dicht. Es sei nämlich h eine beliebige Einbettung aus H und ζ eine positive Zahl. Da A' höchstens $(n-1)$-dimensional ist, existiert eine eindeutige, stetige Abbildung h' von A' auf einen höchstens $(n-1)$-dimensionalen Komplex L des R_k derart, daß h und h' einen Abstand $< \zeta$ voneinander haben [16]). Indem man nötigenfalls die Ecken von L ein wenig verrückt, kann man wegen der aus der Gleichung $m + n = k$ folgenden Ungleichung $m + (n-1) < k$ sofort annehmen, daß L fremd ist zur m-dimensionalen Ebene E_i. Dann ist aber h' nicht in H_i enthalten. Also ist H_i in H nirgends dicht, wie behauptet. Für jedes i ist nach dem soeben Bewiesenen die Menge $H - H_i$ in H offen und dicht. Also ist die Menge

$$H^{**} = H - (H_1 + H_2 + \cdots) = (H - H_1) \cdot (H - H_2) \cdots$$

ein in H dichtes G_δ. Sie besteht aus allen Einbettungen h von A' in den R_k, bei welchen $h(A')$ fremd ist zu allen Ebenen $E_1, E_2 \ldots$.

Der Durchschnitt $H^* \cdot H^{**}$ der im vollständigen Raum H dichten G_δ-Mengen H^* und H^{**} ist in H dicht (§ 1, Nr. 2). Es sei g eine Einbettung von A' aus diesem Durchschnitt, die von f auf A' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ hat. Dann ist a′) erfüllt. Die Gültigkeit von b′) folgt daraus, daß g in H^* enthalten ist.

Wir bezeichnen noch mit T die wegen der Kompaktheit von $g(A')$ kompakte Menge aller Ebenen aus S, die zu $g(A')$ nicht fremd sind. Da die Menge der Ebenen

$E_1, E_2, \ldots$ in S dicht ist nach Wahl der E_i und zu $g(A')$ fremd ist (weil g in H^{**} enthalten ist), so ist also die in S dichte Menge der Ebenen $E_1, E_2, \ldots$ fremd zu T. Mithin ist die abgeschlossene Menge T in S nirgends dicht und die in S offene Menge $S' = S - T$ in S dicht.

2. *Schritt.* Definition von g auf A''. Wir wollen die im 1. Schritt definierte Einbettung von $A' < A''$ fortsetzen auf ganz A'' derart, daß folgendes gilt:

a'') g hat von f auf A'' einen Abstand $< \frac{2\varepsilon}{3}$;

b$_1''$) A'' ist von endlicher M-Ordnung bzgl. S' bei g;

b$_2''$) in jede Ebene E aus $S - S'$ bildet g höchstens abzählbar viele Punkte von A'' mit höchstens $(m+1)(k-m)$ Häufungspunkten ab; diese Häufungspunkte sind in A' enthalten.

Die nach dem 1. Schitt bereits vorliegende Einbettung g von A' hat nach a') von f auf A' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$. Nach Hilfssatz 5 können wir g zunächst wenigstens fortsetzen zu einer Einbettung g' von ganz A'' in den R_k derart, daß g' von f auf A'' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ hat (da $Z_1 + Z_2 + \cdots$ in A'' offen ist, ist $A' = A'' - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ in A'' abgeschlossen).

Mit A ist auch $f(A)$ kompakt, also beschränkt. Mithin existiert ein achsenparalleler, k-dimensionaler Würfel W des R_k mit dem Mittelpunkt im Ursprung, welcher $f(A)$ im Innern enthält derart, daß $f(A)$ vom Komplement $R_k - W$ von W einen Abstand $> \frac{4}{3}\varepsilon$ hat. Wir setzen noch $\frac{\varepsilon}{9} = \delta$. Dann sei φ die Abbildung des Hilfssatzes 4 und h' die Einbettung $\varphi^{-1}g'$ von A'' in den R_k. Da g' von f auf A'' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ hat, so hat die Menge $g'(A'')$ von $R_k - W$ einen Abstand $> \varepsilon$; da weiter jeder Punkt aus W von seinem φ-Bild einen Abstand $< \delta$ hat (Hilfssatz 4), so ist $h'(A'')$ in W enthalten und hat von $R_k - W$ einen Abstand $> \frac{8\varepsilon}{9}$; außerdem hat h' von g' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{9}$.

Wir nehmen nun als bereits bewiesen an (Nachtrag, S. 60) die Existenz einer Darstellung jeder n-Zelle Z_i von A'' als Summe $\sum_j Z_i^j$ abzählbar unendlich vieler abgeschlossener n-Zellen Z_i^j $(j = 1, 2, \ldots)$ mit $\limsup_{i,j} Z_i^j < A'$ und einer Einbettung h'' von A'' in den R_k mit folgenden Eigenschaften:

c) h' und h'' haben einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{9}$ voneinander;

d) h'' ist auf A' mit h' identisch;

e) jede n-Zelle Z_i^j wird durch h'' topologisch auf ein n-dimensionales Simplex T_i^j des R_k abgebildet;

f) jedes Simplex T_i^j projiziert sich schlicht auf die durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$ definierte n-dimensionale Ebene F_0 des R_k.

Die Einbettung $\varphi h''$ ist auf ganz A'' definiert. Nach d) ist h'' auf A' mit $h' = \varphi^{-1}g'$ identisch und nach Konstruktion von g' ist g' auf A' mit g identisch; also ist $\varphi h'' = g$ auf A', d. h. $\varphi h''$ ist eine Fortsetzung der bisher nur auf A' definierten Einbettung g auf ganz A''. Wir bezeichnen diese Fortsetzung von g auf ganz A'' mit g und wollen zeigen, daß die hiermit auf ganz A'' definierte Einbettung g den Bedingungen a''), b$_1''$) und b$_2''$) genügt.

Nach Konstruktion von g' hat g' von f einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$; da φ von der identischen Abbildung einen Abstand $< \delta = \frac{\varepsilon}{9}$ hat (Hilfssatz 4), hat g' von $\varphi^{-1}g' = h'$ und $\varphi h'' = g$ von h'' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{9}$; schließlich hat h' von h'' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{9}$ nach c); also gilt a$''$).

Zum Beweis von b$_1''$) und b$_2''$) sei E eine zunächst beliebige Ebene aus S. Wir betrachten den Durchschnitt $g(Z_1 + Z_2 + \cdots) \cdot E$. Wegen e) und $g = \varphi h''$ ist

$$g(Z_1 + Z_2 + \cdots) = \sum_{i,j} g(Z_i^j) = \sum_{i,j} \varphi(T_i^j),$$

und zwar bildet g jede (abgeschlossene) n-Zelle Z_i^j topologisch auf die (abgeschlossene) n-Zelle $\varphi(T_i^j)$ ab, wie aus c) und der Tatsache folgt, daß φ topologisch ist (Hilfssatz 4). Da wegen f) und Hilfssatz 4 die m-dimensionale Ebene E mit $\varphi(T_i^j)$ höchstens endlich viele Punkte gemein hat, so folgt also: In jede Ebene E aus S bildet g höchstens endlich viele Punkte jeder (abgeschlossenen) n-Zelle Z_i^j ab. Hieraus folgt erstens b$_1''$): Ist nämlich E in $S' < S$ enthalten, hat also E von $g(A')$ einen positiven Abstand, so ist wegen $\limsup_{i,j} Z_i^j < A'$ für höchstens endlich viele Z_i^j der Durchschnitt $g(Z_i^j) \cdot E$ nicht leer; zweitens folgt b$_2''$): Ist nämlich E in $S - S'$ enthalten, so bildet g höchstens abzählbar viele Punkte von $\sum_i Z_i = \sum_{i,j} Z_i^j$ in E ab, und deren Häufungspunkte sind wegen $\limsup_{i,j} Z_i^j < A'$ in A', also in der nach b$'$) aus höchstens $(m+1)(k-m)$ Punkten bestehenden Menge $g^{-1}(g(A') \cdot E)$ enthalten.

3. *Schritt.* Definition von g auf A'''. Wir wollen die im 2. Schritt auf A'' definierte Einbettung g auf A fortsetzen derart, daß Folgendes gilt:

a$'''$) g hat von f auf A einen Abstand $< \varepsilon$;

b$'''$) A''' hat bei g eine M-Ordnung $\leqq (m+1)(k-m)$ bzgl. S.

Hierzu können wir sofort A''' als zu A'' fremd annehmen, indem wir nötigenfalls die in der kompakten Menge A'' enthaltenen Punkte von A''' aus A''' tilgen, d. h. wir können $A''' = A - A''$ annehmen. Wir bezeichnen nun mit A_i die Menge aller Punkte von A''', die von A'' einen Abstand $\geqq \frac{1}{i}$ haben ($i = 1, 2, \ldots$). Dann ist jede der Mengen A_i kompakt und als Teilmenge von A''' höchstens $(n-1)$-dimensional (vgl. die Voraussetzungen des Satzes 9). Weiter gelten die beiden Beziehungen $A_1 < A_2 < \cdots$ und $A''' = A_1 + A_2 + \cdots$.

Wir setzen zunächst die Einbettung g von A'' in den R_k, die im 2. Schritt konstruiert wurde und nach a$''$) von f auf A'' einen Abstand $< \frac{2\varepsilon}{3}$ hat, fort zu einer Einbettung g'' von A in den R_k, die von f einen Abstand $< \frac{2\varepsilon}{3}$ hat (Hilfssatz 5). Dann ist also g'' enthalten im vollständigen Raum G'' aller auf A'' mit g identischen Einbettungen von A in den R_k. Nun ist im vollständigen Raum F_i aller Einbettungen von A_i in den R_k ein dichtes G_δ die Menge G_i aller Einbettungen von A_i in den R_k, bei welchen A_i eine M-Ordnung $\leqq (m+1)(k-m)$ hat bzgl. S (Beweis analog wie im 1. Schritt für H). Mithin ist ein in G'' dichtes G_δ die Menge H_i aller Einbettungen aus G'', die auf A_i mit Einbettungen aus G_i identisch sind (Hilfssatz 5; man setze darin $B = A''$, $C = A_i$, $f_0 = g$, $F_0 = G''$, $F_C = F_i$, $G_C = G_i$, $G = H_i$). Dann ist auch der Durchschnitt $H = H_1 \cdot H_2 \cdots$

in G'' dicht. (§ 1, Nr. 2). Wir wählen in ihm eine Einbettung, die von g'' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ hat. Diese Einbettung ist, da sie in G'' enthalten ist, eine Fortsetzung von g auf ganz A; wir können sie also mit g bezeichnen. Da die hiermit auf ganz A definierte Einbettung g von g'' einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ hat und g'' vorhin so konstruiert war, daß g'' von f einen Abstand $< \frac{2\varepsilon}{3}$ hat, so hat g von f einen Abstand $< \varepsilon$, d. h. es gilt a$'''$). Zum Beweis von b$'''$) sei E eine beliebige Ebene aus S. Für jedes $i = 1, 2, \ldots$ ist g auf A_i mit einer Einbettung aus G_i identisch, bildet also höchstens $(m+1)(k-m)$ Punkte von A_i in E ab. Da dies für jedes i gilt und $A_1 < A_2 < \cdots$ ist, bildet g auch höchstens $(m+1)(k-m)$ Punkte von $A_1 + A_2 + \cdots = A'''$ in E ab, d. h. es gilt b$'''$).

Zusammenfassung der Schritte 1—3. Die im 3. Schritt auf ganz A fortgesetzte Einbettung g in den R_k hat nach a$'''$) einen Abstand $< \varepsilon$ von der beliebig vorgegebenen Einbettung f von A in den R_k; hierbei war ε beliebig positiv gewählt. Nach dem Schlußabsatz des 1. Schrittes ist die Menge S' aller zu $g(A')$ fremden Ebenen aus S in S offen und dicht. Wegen $A = A'' + A'''$, b$_1''$) und b$'''$) ist das Kompaktum A von endlicher M-Ordnung bzgl. S' bei g. Für jede Ebene E aus $S - S'$ hingegen enthält nach b$_2''$) und b$'''$) die Menge $g^{-1}(g(A) \cdot E)$ höchstens abzählbar viele Punkte von A mit höchstens $(m+1)(k-m)$ Häufungspunkten; diese Häufungspunkte sind in A' enthalten. — Also liegt die im Zusatz zu Satz 9 definierte Menge G dicht in F. Damit ist der Zusatz bewiesen und gleichzeitig gezeigt, daß die im Satz 9 ausgesprochene Bedingung auch hinreichend ist.

Nachtrag zum 2. Schritt. Wir holen jetzt noch den Existenzbeweis für die Darstellung $Z_i = \sum_j Z_i^j$ und für die Einbettung h'' nach (S. 58).

Es liegen vor: 1. das Kompaktum A''; es ist dargestellt als Summe der abgeschlossenen, (höchstens) $(n-1)$-dimensionalen Teilmenge A' und von endlich oder abzählbar unendlich vielen, paarweise fremden, in A'' offenen n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$; 2. eine Einbettung h' von A'' in den R_k; 3. eine positive Zahl $\eta = \frac{\varepsilon}{9}$. Zu zeigen ist: 1. die Existenz einer Darstellung jeder n-Zelle Z_i von A'' als Summe $\sum_j Z_i^j$ abzählbar unendlich vieler abgeschlossener n-Zellen Z_i^j $(j = 1, 2, \ldots)$ mit $\limsup_{i,j} Z_i^j < A'$; 2. die Existenz einer Einbettung h'' von A'' in den R_k mit folgenden Eigenschaften:

c) h' und h'' haben einen Abstand $< \eta$ voneinander;

d) h'' ist auf A' mit h' identisch;

e) jede n-Zelle Z_i^j wird durch h'' topologisch auf ein n-dimensionales Simplex T_i^j des R_k abgebildet;

f) jedes Simplex T_i^j projiziert sich schlicht auf die durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$ definierte n-dimensionale Ebene F_0 des R_k.

Entscheidend ist hierbei, daß jede n-Zelle Z_i^j nach e) auf ein Simplex abgebildet wird. Es handelt sich also vor allem darum, die gegebene Einbettung h' durch eine „Glättung“ in eine stückweise glatte Einbettung zu verwandeln.

Jede der endlich oder unendlich vielen n-Zellen Z_i von A'' $(i = 1, 2, \ldots)$ ist ein topologisches Bild $\chi_i(R_n)$ des kartesischen R_n. Ist nun Q ein beliebiger Punkt der n-Zelle Z_i und hat das χ_i-Urbild P von Q im R_n die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$, so ordnen wir dem Punkt Q die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ als Koordinaten in Z_i zu. Auf diese Weise ist in jeder n-Zelle Z_i ein kartesisches Koordinatensystem eingeführt, und im Sinne dieses Koor-

dinatensystems können wir sprechen von Simplexen in Z_i, simplizialen Triangulierungen von Z_i und Einbettungen, die simplizial sind bzgl. solcher simplizialen Triangulierungen von Z_i. Hingegen benutzen wir als Abstände auch in Z_i nach wie vor die durch die Metrik von A'' gelieferten Abstände, also in keinem Fall die Abstandsdefinitionen in Z_i, die durch die kartesischen Koordinaten in Z_i geliefert werden. Es ist jedoch zu bemerken, daß diese beiden Abstandsdefinitionen in Z_i äquivalent sind, was sofort daraus folgt, daß die Abbildung χ_i topologisch ist.

Es sei nun ζ eine so kleine positive Zahl, daß für je zwei Punkte des Kompaktums A'' mit einem Abstand $< \zeta$ die h'-Bilder einen Abstand $< \frac{\eta}{3}$ haben. Weiter sei T_i eine simpliziale Triangulierung der n-Zelle Z_i, d. h. also eine Darstellung von Z_i als Summe von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen, n-dimensionalen Simplexen $Z_i^1, Z_i^2, \ldots$ (im Sinne des Koordinatensystems in Z_i) mit $\limsup_j Z_i^j < \overline{Z}_i - Z_i < A'$ derart, daß der Durchschnitt je zweier dieser Simplexe leer oder ein gemeinsames ν-dimensionales Randsimplex ist ($\nu = 0, 1, \ldots, n+1$); indem wir nötigenfalls zu einer Unterteilung übergehen, können wir sofort annehmen, daß die Durchmesser d_i^j der Simplexe Z_i^j (im Sinne der Metrik des Kompaktums A'') kleiner als $< \frac{\zeta}{i}$ sind und bei festem i für $j \to \infty$ gegen Null konvergieren. Es gilt sogar $\limsup_{i,j} Z_i^j < A'$, wobei jetzt im Unterschiede zu vorhin der lim sup über beide Indizes i und j genommen ist. Zunächst folgt nämlich aus $\limsup_j Z_i^j < A'$ (bei festem i), wenn ein beliebiger Punkt P von Z_i gegeben ist, die Existenz einer positiven Zahl δ_1 derart, daß P von den Simplexen $Z_i^1, Z_i^2, \ldots$, abgesehen von den endlich vielen P enthaltenden Simplexen, Abstände $> \delta_1$ hat (im Sinne der Metrik von A''); weiter folgt aus der Offenheit von Z_i in A'' die Existenz einer positiven Zahl δ_2 derart, daß P von $A'' - Z_{i'}$, insbesondere also von allen Simplexen $Z_{i'}^j$ mit $i' \neq i$ Abstände $> \delta_2$ hat; setzen wir nun $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$, so hat also P von allen Simplexen Z_i^j ($i' = i$ oder $i' \neq i$), abgesehen von höchstens endlich vielen Ausnahmen, Abstände $> \delta$; also ist P nicht im $\limsup_{i,j} Z_i^j$ enthalten; dies gilt für jeden Punkt P von $Z_1 + Z_2 + \cdots = A'' - A'$; mithin ist $\limsup_{i,j} Z_i^j < A'$, wie behauptet.

Nun zur Definition der Einbettung h''. Es seien $Q_i^1, Q_i^2, \ldots$ die sämtlichen Ecken aller Simplexe Z_i^j von Z_i. Wir ordnen jedem Punkt Q_i^l einen Punkt der $\frac{\eta}{3ij}$-Umgebung des Bildes $h'(Q_i^l)$ als Bild $h''(Q_i^l)$ zu, und zwar wählen wir die Punkte $h''(Q_i^l)$ im R_k so, daß sie erstens zu je $n+1$ linear unabhängig sind und zweitens jedes von $n+1$ von ihnen aufgespannte n-dimensionale Simplex sich schlicht projiziert auf die durch die Gleichungen $x_{n+1} = \cdots = x_k = 0$ definierte n-dimensionale Ebene F_0 des R_k. Durch diese Zuordnung ist für jede n-Zelle Z_i eine bzgl. der Triangulierung T_i von Z_i simpliziale Einbettung h'' in den R_k definiert, und zwar ist diese Einbettung auf $Z_1 + Z_2 + \cdots = A'' - A'$ eindeutig, da die n-Zellen $Z_1, Z_2, \ldots$ paarweise fremd sind. Nach Wahl der Bilder $h''(Q_i^l)$ sind erstens die Bilder der Ecken jedes Simplexes Z_i^j im R_k linear unabhängig, so daß also h'' jedes Simplex Z_i^j topologisch auf ein n-dimensionales Simplex T_i^j des R_k abbildet, womit e) erfüllt ist; zweitens projiziert sich insbesondere jedes dieser Simplexe T_i^j schlicht auf die Ebene F_0, womit f) erfüllt ist. — Um schließlich die Einbettung auf ganz A'' zu definieren, setzen wir $h' = h''$ auf A',

so daß also auch d) erfüllt ist. Wir haben nun noch zu zeigen, daß auch c) gilt und vor allem, daß h'' stetig ist.

Zum Beweise von c) sei P ein beliebiger Punkt von A''. Liegt P in A', so ist $h'(P) = h''(P)$ und es ist nichts zu beweisen. Es sei also P in $A'' - A'$, mithin in einer n-Zelle Z_i enthalten. Dann liegt P in einem Simplex Z_i^j. Nach Wahl der Triangulierung T_i von Z_i ist der Durchmesser d_i^j von Z_i^j kleiner als $< \frac{\zeta}{i}$. Nach Wahl der Zahl ζ hat also das Bild $h'(Z_i^j)$ einen Durchmesser $< \frac{\eta}{3}$. Da die h''-Bilder der Ecken von Z_i^j in der $\frac{\eta}{3ij}$-Umgebung ihrer h'-Bilder gewählt wurden, und die Menge $h''(Z_i^j) = T_i^j$ ein Simplex ist, hat die Menge $h'(Z_i^j) + h''(Z_i^j)$ einen Durchmesser $< \frac{\eta}{3} + \frac{2\eta}{3ij} < \eta$. Diese letztere Menge enthält aber die Punkte $h'(P)$ und $h''(P)$, die also einen Abstand $< \eta$ voneinander haben; hieraus folgt c).

Schließlich haben wir noch die Stetigkeit der Einbettung h'' zu beweisen. Da h'' auf jeder einzelnen n-Zelle Z_i und auf der kompakten Menge $A' = A'' - (Z_1 + Z_2 + \cdots)$ stetig ist, haben wir nur zu beweisen, daß sich die Einbettungen der Mengen $A', Z_1, Z_2, \ldots$ stetig aneinander schließen. Da jede einzelne n-Zelle Z_i in A'' offen, also h'' auf $Z_1 + Z_2 + \cdots$ stetig ist, genügt es, folgendes zu beweisen: Ist $P_1, P_2, \ldots$ eine Folge von Punkten aus $Z_1 + Z_2 + \cdots$, die gegen einen Punkt P von A' konvergiert, so konvergieren die Punkte $h''(P_1), h''(P_2), \ldots$ gegen $h''(P)$. Der Punkt P_l liegt in einem Simplex $Z_{i_l}^{j_l}$; hierbei gilt $i_l \cdot j_l \to \infty$ für $l \to \infty$. Nach Wahl der Triangulierung T_{i_l} von $Z_{i_l}^{j_l}$ ist der Durchmesser $d_{i_l}^{j_l}$ von $Z_{i_l}^{j_l}$ kleiner als $< \frac{\zeta}{i_l}$; außerdem konvergieren bei festem i die Durchmesser d_i^j der Z_i^j gegen Null mit $j \to \infty$. Hieraus folgt $\lim d_{i_l}^{j_l} = 0$ wegen $i_l \cdot j_l \to \infty$. Also konvergieren die ganzen Simplexe $Z_{i_l}^{j_l}$ gegen den Punkt P. Wegen der Stetigkeit von h' konvergieren mithin die Bilder $h'(Z_{i_l}^{j_l})$ gegen $h'(P)$. Nun liegen die h''-Bilder der Ecken von $Z_{i_l}^{j_l}$ in der $\frac{\eta}{3ij}$-Umgebung der h'-Bilder dieser Ecken. Mithin konvergieren auch die von ihnen aufgespannten Simplexe $\mathsf{T}_{i_l}^{j_l} = h''(Z_{i_l}^{j_l})$ und damit die in den letzteren enthaltenen Punkte $h''(P_l)$ gegen $h''(P) = h'(P)$, was zu beweisen war.

§ 4. Die Dimensionsordnung.

Satz 10. *Voraussetzungen. Es seien k eine natürliche Zahl; $m < k$ und n zwei nichtnegative, ganze rationale Zahlen; A ein n-dimensionales Kompaktum; S eine volle Parallelschar m-dimensionaler Ebenen des R_k.*

Behauptung. Bei jeder Einbettung in den R_k hat A eine D-Ordnung $\geqq m + n - k$ bzgl. S.

Beweis. Es sei f eine Einbettung von A in den R_k. Da für mindestens eine Ebene E aus S die Menge $f(A) \cdot E$ und daher auch die Menge $f^{-1}(f(A) \cdot E)$ nicht leer ist, also eine Dimension $\geqq 0$ hat, ist die Behauptung des Satzes 10 trivial, wenn $m + n - k \leqq 0$ ist.

Es genügt also, den Fall $m + n - k > 0$ zu betrachten. Wir nehmen nun an, die Behauptung des Satzes 10 sei falsch. Dann gibt es also eine Einbettung f von A in den R_k, bei welcher A eine D-Ordnung $\leqq m + n - k - 1$ bzgl. S hat. Es sei F eine $(k - m)$-dimensionale Ebene des R_k, welche auf den Ebenen von S senkrecht steht, also mit jeder von ihnen genau einen Punkt gemein hat. Wir bezeichnen mit π die Ortho-

gonalprojektion auf F und setzen $\pi f = g$. Die so definierte Einbettung g von A in die $(k-m)$-dimensionale Ebene F hat folgende Eigenschaft: für jeden Bildpunkt ist das Urbild in A höchstens $(m+n-k-1)$-dimensional (nämlich gleich dem Urbild des Durchschnittes von $f(A)$ mit einer Ebene E aus S). Da $g(A)$ als Teilmenge von F höchstens $(k-m)$-dimensional ist, so folgt hieraus, daß A höchstens die Dimension

$$(m+n-k-1)+(k-m)=n-1$$

hat [20]), im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes 10.

Satz 11. *Voraussetzungen. Es seien k eine natürliche Zahl; $m<k$ und n zwei nichtnegative, ganze rationale Zahlen; A ein n-dimensionales Kompaktum; S eine abgeschlossene Schar m-dimensionaler Ebenen des R_k; s eine nichtnegative, ganze rationale Zahl $\geqq m+n-k$.*

Behauptung. Die Menge G aller Einbettungen von A in den R_k, bei welchen A eine D-Ordnung $\leqq s$ bzgl. S hat, ist ein im vollständigen Raum F aller Einbettungen von A in den R_k dichtes G_δ.

Beweis. Wir bezeichnen für eine beliebige positive Zahl ε mit $G(\varepsilon)$ die Menge aller Einbettungen f von A in den R_k mit folgender Eigenschaft: Für jede Ebene E aus S ist die Menge $f^{-1}(f(A)\cdot E)$ überdeckbar durch endlich viele in A offene Teilmengen von A mit Durchmessern $<\varepsilon$, deren abgeschlossene Hüllen zu je $s+2$ einen leeren Durchschnitt haben.

Nehmen wir als bereits bewiesen an, daß $G(\varepsilon)$ in F dicht und offen ist. Wir betrachten den Durchschnitt $D=G(1)\cdot G\left(\frac{1}{2}\right)\cdot G\left(\frac{1}{3}\right)\cdots$. Da die Mengen $G\left(\frac{1}{j}\right)$ in F dicht und offen sind, ist D ein in F dichtes G_δ (§ 1, Nr. 2). Wir zeigen, daß D identisch ist mit der in der Behauptung unseres Satzes definierten Menge G. Es sei nämlich einerseits g eine beliebige Einbettung aus D. Dann ist für jedes natürliche j die Menge $A_E=g^{-1}(g(A)\cdot E)$ überdeckbar durch endlich viele offene Mengen $O_1,\ldots,O_t$ von A mit Durchmessern $<\frac{1}{j}$, deren abgeschlossene Hüllen zu je $s+2$ einen leeren Durchschnitt haben. Also ist A_E Summe der abgeschlossenen Mengen $A_E\cdot\bar{O}_i$ $(i=1,\ldots,t)$ mit Durchmessern $<\frac{1}{j}$, die zu je $s+2$ einen leeren Durchschnitt haben. Dies gilt für jedes natürliche j. Also ist A_E höchstens s-dimensional [21]). Da dies für jede Ebene E aus S gilt, ist g in G enthalten und daher $D<G$. Umgekehrt sei g eine beliebige Einbettung aus G und E eine Ebene aus S. Dann ist die Menge $A_E=g^{-1}(g(A)\cdot E)$ höchstens s-dimensional, also für ein beliebiges natürliches j Summe endlich vieler abgeschlossener Teilmengen $A_1,\ldots,A_t$ mit Durchmessern $<\frac{1}{3j}$, die zu je $s+2$ einen leeren Durchschnitt haben [21]). Bezeichnen wir nun für eine hinreichend kleine positive Zahl $\delta<\frac{1}{j}$ mit O_i die in A offene Menge aller Punkte von A, die von A_i Abstände $<\delta$ haben, so haben die Mengen $O_1,\ldots,O_t$ Durchmesser $<\frac{1}{j}$ und ihre abgeschlossenen Hüllen sind zu je $s+2$ fremd; außerdem überdecken diese Mengen O_i die Menge A_E. Da dies für jede Ebene E aus S gilt, ist also g in $G\left(\frac{1}{j}\right)$ und daher in D enthalten. Also gilt auch $G<D$ und daher $G=D$.

---

[20]) Menger, Dimensionstheorie, S. 235.

[21]) Menger, Dimensionstheorie, S. 156.

Den Beweis für die Dichtigkeit und Offenheit von $G(\varepsilon)$ führt man nun analog wie den Beweis für die Dichtigkeit und Offenheit von $G(\varepsilon)$ im Beweis des Satzes 6 (S. 48). Dabei hat man an jenen Überlegungen nur die folgenden Änderungen anzubringen: An Stelle des Hilfssatzes 1 benutzt man jetzt den Hilfssatz 2 und an die Stelle der offenen Mengen $O_1, \ldots, O_s$ mit festem s treten jetzt endlich viele Mengen $O_1, \ldots, O_t$ mit von E abhängigem t, deren abgeschlossene Hüllen zu je $s+2$ einen leeren Durchschnitt haben.

Satz 12. *Voraussetzungen. Es seien k eine natürliche Zahl; $m < k$ und n zwei nichtnegative, ganze rationale Zahlen; A ein n-dimensionales Kompaktum, in welchem dicht liegt die Menge aller Punkte, in denen A eine Dimension $\geqq s$ hat; hierbei sei s eine nichtnegative, ganze rationale Zahl mit $m + n - k \leqq s \leqq n$; schließlich sei S eine abgeschlossene Vollschar m-dimensionaler Ebenen des R_k.*

Behauptung. Die Menge G aller Einbettungen von A in den R_k, bei welchen A die total homogene D-Ordnung s bzgl. S hat, ist dicht im Raum F aller Einbettungen von A in den R_k.

Beweis. Wir gehen analog vor wie beim Beweis des Satzes 7 (S. 50).

Zunächst gilt der erste Teil jenes Beweises in unserem Fall bis zu dem Satz: „Damit ist der Satz 7 bewiesen" bis auf folgende Änderungen: An Stelle von „M-Ordnung" liest man immer „D-Ordnung"; die s-punktigen Mengen Q_i sind zu ersetzen durch Mengen $Q_i < A$, die abgeschlossen und s-dimensional sind und in welchen die Mengen der Punkte, in denen sie die Dimension s haben, dicht sind; für G_0 hat man im vorliegenden Fall die nach Satz 11 in F dichte G_δ-Menge aller Einbettungen von A in den R_k zu nehmen, bei welchen A eine D-Ordnung $\leqq s$ hat; der Satz „Damit ist Satz 7 bewiesen" hat hier zu lauten: „Damit ist Satz 12 bewiesen".

Da bei der Definition von δ_i, Q_i, E_i und g_i größere Änderungen nötig sind, führen wir diese Definition vollständig durch, ohne auf den Beweis des Satzes 7 zurückzugreifen.

Zunächst wiederholen wir die im vorstehenden Teil des Beweises benutzten Bedingungen $\mathrm{a}_i) - \mathrm{d}_i)$, denen δ_i, Q_i, E_i, g_i genügen müssen.

$\mathrm{a}_i)$ δ_i ist höchstens gleich dem Abstand von g_{i-1} und $F - O_i$;

$\mathrm{b}_i)$ die Menge Q_i ist enthalten in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von P_i;

$\mathrm{c}_i)$ die Menge $g_i(Q_j)$ ist enthalten in der Ebene E_j $(j = 1, \ldots, i)$;

$\mathrm{d}_i)$ g_{i-1} und g_i haben einen Abstand $< \mathrm{Min}\left(\frac{c}{2^i}, \frac{\delta_1}{2^{i+1}}, \frac{\delta_2}{2^i}, \ldots, \frac{\delta_i}{2^2}\right)$.

Hierzu fügen wir noch folgende, für die Durchführung der induktiven Definition von δ_i, Q_i, E_i und g_i erforderliche Bedingung hinzu:

$\mathrm{e}_i)$ für $j < i$ ist entweder Q_i in Q_j enthalten oder Q_i zu Q_j fremd.

Es liegt bereits eine Einbettung g_0 aus G_0 vor. Wir machen folgende Induktionsvoraussetzung: Für irgendein natürliches i liegen bereits Einbettungen $g_0, \ldots, g_{i-1}$ aus G_0 vor; falls $i > 1$ ist, mögen außerdem für jedes $j = 1, \ldots, i-1$ vorliegen: eine positive Zahl δ_j, eine abgeschlossene, s-dimensionale Menge $Q_j < A$, in welcher die Menge aller Punkte, in welchen Q_j die Dimension s hat, dicht liegt, und schließlich eine Ebene E_j der Schar S; dabei seien die Bedingungen $\mathrm{a}_i) - \mathrm{e}_i)$ erfüllt.

Wir wollen nun nacheinander δ_i, Q_i, E_i und g_i konstruieren. Dabei unterscheiden wir gelegentlich zwei Fälle. Fall α): Der Punkt P_i ist in keiner Menge Q_j mit $1 \leqq j < i$ enthalten; dieser Fall liegt insbesondere vor für $i = 1$. Fall β): Der Punkt P_i liegt in einer Menge Q_j mit $1 \leqq j < i$; in diesem Fall bezeichnen wir mit j_0 die größte natürliche Zahl $< i$, für welche P_i in Q_{j_0} liegt.

1. Definition von δ_i. Da g_{i-1} in G_0 enthalten ist, liegt g_{i-1} auch in $O_i > G_0$. Wegen der Offenheit von O_i in F hat daher g_{i-1} einen positiven Abstand von $F - O_i$ (worunter wir die Zahl $+\infty$ verstehen, wenn $O_i = F$ ist). Es sei nun δ_0 eine beliebige positive Zahl, welche der Bedingung a_i) genügt.

2. Definition von Q_i. Wir wählen zunächst eine positive Zahl

$$(1) \qquad \Delta_i < \frac{1}{3} \operatorname{Min}\left(\frac{\varepsilon}{2^i}, \frac{\delta_1}{2^{i+1}}, \frac{\delta_2}{2^i}, \ldots, \frac{\delta_i}{2^2}\right).$$

Dann existiert eine so kleine Umgebung U von P_i in A, daß U in der $\frac{1}{i}$-Umgebung von P_i in A und $g_{i-1}(U)$ in der Δ_i-Umgebung von $g_{i-1}(P)$ im R_k enthalten ist; im Falle $i > 1$ sei außerdem U fremd zu allen Mengen Q_j mit $1 \leqq j < i$, welche P_i nicht enthalten (falls solche Q_j überhaupt existieren). Jetzt bezeichnen wir mit Q_i eine im Fall α) in U, im Fall β) in $U \cdot Q_{j_0}$ enthaltene abgeschlossene, s-dimensionale Menge, in welcher die Menge der Punkte, in denen Q_i die Dimension s hat, dicht ist; eine solche Menge existiert, da in A bzw. Q_{j_0} die Menge aller Punkte von A bzw. Q_{j_0} dicht ist, in denen A bzw. Q_{j_0} eine Dimension $\geqq s$ hat (Voraussetzung des Satzes 11 bzw. Induktionsvoraussetzung). Die so gewählte Menge Q_i genügt den Bedingungen b_i), e_i) und der folgenden:

(2) $g_{i-1}(Q_i)$ ist in der Δ_i-Umgebung von $g_{i-1}(P_i)$ enthalten.

3. Definition von E_i. Im Falle α) sei E_i eine Ebene der Vollschar, für welche gilt:

(3) der Punkt $g_{i-1}(P_i)$ ist in E_i enthalten.

Im Fall β) setzen wir $E_i = E_{j_0}$. Auch in diesem Falle gilt (3), da P_i in Q_{j_0} und wegen c_{i-1}) die Menge $g_{i-1}(Q_{j_0})$ in E_{j_0} enthalten ist.

4. Konstruktion von g_i. Wir definieren zunächst eine i. a. nicht in G_0 enthaltene Hilfseinbettung f_i aus F folgendermaßen. Es liege zunächst der Fall β) vor. Dann setzen wir $f_i = g_{i-1}$; wegen c_{i-1}), $E_i = E_{j_0}$ und $Q_i = Q_{j_0}$ gilt

$\bar{c}_i$) die Menge $f_i(Q_j)$ ist enthalten in der Ebene E_j $(j = 1, \ldots, i)$.

Da f_i und g_{i-1} identisch sind, also den Abstand 0 haben, gilt in trivialer Weise:

$\bar{d}_i$) g_{i-1} und f_i haben einen Abstand $< 2\Delta_i$.

Nun liege der Fall α) vor. Wofern die Menge $Q_1 + \cdots + Q_{i-1}$ bereits definiert ist (d. h. wofern $i > 1$ ist) setzen wir zunächst $f_i = g_{i-1}$ auf dieser Menge. Um sodann f_i auf der Menge Q_i zu definieren, die im Falle α) und $i > 1$ zu $Q_1 + \cdots + Q_{i-1}$ fremd ist, bezeichnen wir mit π die Orthogonalprojektion auf die Ebene E_i und setzen $f_i = \pi g_{i-1}$ auf Q_i; dann gilt wegen c_{i-1}) auch $\bar{c}_i$). Aus (2) und (3) folgt, daß jeder Punkt der Menge $g_{i-1}(Q_i)$ von der Ebene E_i einen Abstand $< \Delta_i$ hat. Dann hat f_i von g_{i-1} auf Q_i und daher auf ganz $Q_1 + \cdots + Q_i$ einen Abstand $< \Delta_i$. Nach Hilfssatz 3 können wir nun f_i auf ganz A fortsetzen zu einer Einbettung f_i in den R_k, die von g_{i-1} einen Abstand $< 2\Delta_i$ hat. Es gilt dann wieder $\bar{d}_i$).

Nun wollen wir mit Hilfe von f_i die Einbettung g_i konstruieren. Hat zufällig A bei der Einbettung f_i eine D-Ordnung $\leqq s$ bzgl. S, so setzen wir $f_i = g_i$ und sind fertig. Andernfalls zeigen wir unten, daß die G_δ-Menge G_0 aller Einbettungen bei welchen A eine D-Ordnung $\leqq s$ hat, Einbettungen enthält, die auf der Menge $Q = Q_1 + \cdots + Q_i$ mit f_i identisch sind und von f_i Abstände $< \Delta_i$ haben; eine solche Einbettung bezeichnen wir dann mit g_i. In beiden Fällen folgt aus $\bar{c}_i$) die Gültigkeit von c_i), aus (1) und $\bar{d}_i$) die Gültigkeit von d_i).

Fügt man die hiermit definierte Zahl δ_i, Menge Q_i, Ebene E_i und Einbettung g_i zu den nach Induktionsvoraussetzung bereits vorliegenden Zahlen $\delta_1, \ldots, \delta_{i-1}$, Mengen $Q_1, \ldots, Q_{i-1}$, Ebenen $E_1, \ldots, E_{i-1}$ und Einbettungen $g_0, g_1, \ldots, g_{i-1}$ hinzu (im Fall $i = 1$ liegt nur g_0 vor), so ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt, wenn man darin i durch $i + 1$ ersetzt.

Wir haben jetzt nur noch die Existenz einer auf $Q = Q_1 + \cdots + Q_i$ mit f_i identischen Einbettung g_i in G_0 mit einem Abstand $< \Delta_i$ von f_i zu beweisen.

Wir bezeichnen mit A^h die (kompakte) Menge aller Punkte von A, die von der (kompakten) Menge Q Abstände $\leqq \frac{1}{h}$ haben ($h=1, 2, \ldots$). Dann ist $A = Q + A^1 + A^2 + \cdots$. Es sei weiter $F_i < F$ der vollständige Raum aller auf Q mit f_i identischen Einbettungen von A in den R_k. Dann ist ein in F_i dichtes G_δ die Menge G_i^h aller auf Q mit f_i identischen Einbettungen von A, bei welchen A^h eine D-Ordnung $\leqq s$ bzgl. S hat. Dies ergibt sich aus dem Hilfssatz 5, wenn man darin $B = Q$, $C = A^h$, $f_0 = f_i$, $F_0 = F_i$, F_C gleich dem vollständigen Raum F^h aller Einbettungen von A^h in den R_k, G_C gleich der (nach Satz 11) in F^h dichten G_δ-Menge aller Einbettungen aus F^h, bei welchen A^h eine D-Ordnung $\leqq s$ bzgl. S hat, schließlich $G = G_i^h$ setzt.

Der Durchschnitt $G_i = \prod_{h=1}^{\infty} G_i^h$ ist ein im vollständigen Raum F_i dichtes G_δ als Durchschnitt der in F_i dichten G_δ-Mengen G_i^h (§ 1, Nr. 2). Also enthält G_i eine Einbettung g_i, die von f_i einen Abstand $< \Delta_i$ hat. g_i ist als Einbettung aus F_i auf der Menge Q mit f_i identisch. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß G_i und damit g_i in G_0 enthalten ist. Dies tun wir jetzt.

Es sei g eine beliebige Einbettung aus G_i. Wir haben zu zeigen: Für jede Ebene E aus S ist $g^{-1}(g(A) \cdot E)$ höchstens s-dimensional. Zunächst ist Q als Summe der kompakten, s-dimensionalen Mengen $Q_1, \ldots, Q_i$ selbst s-dimensional. Also ist einerseits $Q \cdot g^{-1}(g(A) \cdot E)$ höchstens s-dimensional. Da g für jedes h in G_i^h enthalten, also auf A^h mit einer Einbettung aus G^h identisch ist, so ist andererseits die Menge $A^h \cdot g^{-1}(g(A) \cdot E)$ aller durch g in E abgebildeten Punkte von A^h höchstens s-dimensional. Wegen $A = Q + A^1 + A^2 + \cdots$ ist also $g^{-1}(g(A) \cdot E)$ die Summe der abzählbar vielen kompakten, höchstens s-dimensionalen Mengen $Q \cdot g^{-1}(g(A) \cdot E)$ und $A^h \cdot g^{-1}(g(A) \cdot E)$ ($h = 1, 2, \ldots$). Mithin ist $g^{-1}(g(A) \cdot E)$ selbst höchstens s-dimensional [22]), was zu zeigen war. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

§ 5. Topologische Einbettungen.

Satz 13. *Es sei $2n + 1 \leqq k$ und T die Menge aller topologischen Einbettungen des n-dimensionalen Kompaktums A in den R_k. Dann bleiben die Sätze* 6—9, 11, 12 *richtig, wenn man darin die Menge G durch die Menge $G \cdot T$ ersetzt.*

Beweis. Im Falle $2n + 1 \leqq k$ ist die Menge T ein im vollständigen Raum F aller Einbettungen von A in den R_k dichtes G_δ [7]).

Die Menge G des Satzes 6 bzw. 11 ist ein in F dichtes G_δ nach der Behauptung des Satzes 6 bzw. 11 selbst. Mithin ist auch der Durchschnitt $G \cdot T$ ein in F dichtes G_δ (§ 1, Nr. 2). Also bleiben die Sätze 6 und 11 richtig bei Ersetzung von G durch $G \cdot T$.

Dasselbe Ergebnis erhält man für die Sätze 7 und 12, wenn man die in den Beweisen dieser Sätze auftretenden, in F dichten G_δ-Mengen G_0 ersetzt durch die ebenfalls in F dichten G_δ-Mengen $G_0 \cdot T$.

Beim Beweis des Satzes 8 sorgt man durch eine beliebig kleine Verrückung der Eckenbilder $h(Q)$ dafür, daß h topologisch wird, was wegen $2n+1 \leqq k$ möglich ist. Da die Abbildung φ des Hilfssatzes 4 topologisch ist, gilt dann dasselbe auch für φh.

Schließlich bringt man im Falle $2n+1 \leqq k$ am Beweise des Satzes 9 folgende Änderungen an. Im 1. Schritt ersetzt man den vollständigen Raum H aller Einbettungen von A' in den R_k durch die in H dichte G_δ-Menge H' aller topologischen Einbettungen von A' in den R_k. Die Menge H_i $(i = 1, 2, \ldots)$ wird jetzt folgendermaßen definiert: Bezeichnen $K_1, K_2, \ldots$ die abzählbar vielen Simplexe $< W$, deren Ecken nur rationale Koordinaten haben, so sei H_i die Menge aller Einbettungen h von A' in den R_k, für welche $h(A')$ zu $E_i + \varphi(K_i)$ nicht fremd ist (W und φ sind im 2. Schritt unabhängig vom 1. Schritt definiert); diese Menge H_i ist in H abgeschlossen und nirgends dicht. Die im 1. Schritt auf A' definierte Einbettung g hat dann neben den Eigenschaften a') und b') noch die folgenden: g ist topologisch auf A'; $g(A')$ ist fremd zu den φ-Bildern aller n-dimensionalen Simplexe W, deren Ecken nur rationale Koordinaten haben. Im 2. Schritt (Nachtrag S. 60) wählen wir die Bilder $h''(Q_i^l)$ so, daß sie neben den l. c. genannten zwei Eigenschaften noch folgende zwei haben: drittens haben die Punkte $h''(Q_i^l)$ nur rationale Koordinaten (so daß also $h'(A') = \varphi^{-1}g(A')$ wegen β) zu $h''(Z_1 + Z_2 + \cdots) = \Sigma T_i^j$ und daher $g(A')$ zu $g(Z_1 + Z_2 + \cdots)$ fremd ist); viertens ist h'' (und daher $g = \varphi h''$) auf $Z_1 + Z_2 + \cdots$ topologisch; dann ist g wegen α) auf $A' + Z_1 + Z_2 + \cdots$ topologisch. Im 3. Schritt schließlich verstehe man unter G_i die Teilmenge von F_i, bestehend aus allen topologischen Einbettungen g_i von A_i in den R_k, bei welchen A_i eine M-Ordnung $\leqq (m+1)(k-m)$ bzgl. S hat und $g_i(A_i)$ fremd ist zu $g(A'')$. Diese Menge G_i ist ein in F_i dichtes G_δ als Durchschnitt dreier in F_i dichter G_δ-Mengen, von denen die erste aus allen topologischen Einbettungen von A_i besteht, die zweite aus allen Einbettungen, bei welchen A_i eine M-Ordnung $\leqq (m+1)(k-m)$ bzgl. S hat (Satz 6), die dritte aus allen Einbettungen, bei welchen das Bild von A zu $g(A'')$ fremd ist. Dann ist g auf A topologisch.

---

[22]) Menger, Dimensionstheorie, S. 92.

Eingegangen 10. Juli 1939.

Ergänzung eines Zitates in der Arbeit:

Haupt-Nöbeling-Pauc, Über Abhängigkeitsräume, dieses Journal **181** (1940), 193 ff.

Trotz unserer Bemühungen um Vollständigkeit der Literaturnachweise ist uns leider folgendes entgangen:

T. Nakasawa hat drei Arbeiten: Zur Axiomatik der linearen Abhängigkeit I—III, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2 (1935), 235—255; A 3 (1936), 45—69 und 123—136, veröffentlicht. Er stellt darin unter anderem das gleiche Axiomensystem auf wie wir (S. 195), und entwickelt im wesentlichen den Inhalt unserer §§ 1 bis 5. Auch die Beziehung zur Verbandstheorie ist ausgeführt. Ferner ist [außer der bei Mac Lane (vgl. Fußnote 21 unserer Arbeit) aufgeführten Arbeit von H. Whitney] noch zu nennen: G. Birkhoff, On the lattice theory of ideals, Bull. Amer. math. Soc. **40** (1934), 613—619, wo der Satz von der Eindeutigkeit der direkten Zerlegung bereits für allgemeine Verbände bewiesen ist. Schließlich ist unsere Fußnote 11 noch zu ergänzen durch den Hinweis auch auf die 2. Auflage des 1. Bandes der van der Waerdenschen Algebra.

Wir verdanken diese Hinweise freundlichen Mitteilungen der Herren G. Birkhoff und B. L. van der Waerden.

Eingegangen 24. Juli 1940.

Ergebnis des 10. wissenschaftlichen Wettbewerbs der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V.

Beim 10. wissenschaftlichen Wettbewerb der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V. wurde den beiden folgenden Arbeiten je ein Preis von 250 RM zuerkannt:

Dipl.-Ing. E. Tritschler, Chemnitz: *Stroboskopische Zeitwaage mit ortsveränderlicher Lichtblitzquelle.*

Dipl.-Ing. E. Müller, Berlin: *Über die gebräuchlichsten Uhrvergleiche ohne Registrierung für astronomisch-geodätische Zwecke.*

Auskunft über die, alljährlich laufenden, Wettbewerbe erteilt die Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V., Berlin SW 68, Neuenburgerstraße 8. Vgl. auch dieses Journal **178**, S. 192, und **179**, S. 252.

Eingegangen 11. November 1940.